

# **Mechanik**

Markus Kinateder

Harald Pfeiffer

29. November 2007



# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Was ist Theoretische Physik?</b>   | <b>5</b>  |
| <b>2 Mechanik von Massenpunkten</b>   | <b>6</b>  |
| 2.1 Kinematische Aspekte . . . . .  | 6         |
| 2.2 Newton'sche Bewegungsgleichungen . . . . .  | 8         |
| 2.3 Der Energie-Erhaltungssatz in der Mechanik . . . . .                              | 10        |
| 2.4 Lösung der Bewegungsgleichung für ein Teilchen mit einem Freiheitsgrad . . . . .  | 11        |
| 2.5 Drehimpuls, Drehmoment, Zentralkraftfelder . . . . .                              | 12        |
| 2.6 Der Virialsatz . . . . .  | 13        |
| 2.7 Lösung einfacher Bewegungsgleichungen . . . . .                                   | 14        |
| 2.8 Bewegung im Zentralkraftfeld . . . . .  | 16        |
| <b>3 Lagrangesche Mechanik</b>  | <b>23</b> |
| 3.1 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten . . . . .                        | 23        |
| 3.2 Eingeschränkte Bewegung eines Massenpunktes, Lagrange-Gleichungen 1.Art . . . . . | 25        |
| 3.3 Gleichgewicht des Massenpunktes, Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .          | 27        |
| 3.4 d'Alembertsches Prinzip und Lagrange-Gleichungen 2.Art . . . . .                  | 29        |
| 3.5 Einbeziehung anholonomer Nebenbedingungen . . . . .                               | 34        |
| <b>4 Mechanik in beschleunigten Bezugssystemen</b>                                    | <b>36</b> |
| 4.1 Kinematik . . . . .   | 36        |
| 4.2 Dynamik in beschleunigten Bezugssystemen . . . . .                                | 39        |
| 4.3 Bewegungen auf der rotierenden Erde . . . . .                                     | 40        |
| <b>5 Mechanik von Massenpunktsystemen</b>   | <b>44</b> |
| 5.1 Grundlagen . . . . .  | 44        |
| 5.2 Das Zweikörperproblem . . . . .   | 49        |
| 5.3 Der Streuquerschnitt . . . . .  | 56        |
| 5.4 Streuung am Zentralkraftfeld . . . . .  | 57        |
| <b>6 Schwingungen</b>   | <b>60</b> |
| 6.1 Vorbemerkungen . . . . .  | 60        |
| 6.2 Eigenfrequenzen und Normalschwingungen . . . . .                                  | 64        |
| 6.3 Einfache Schwingungen . . . . .   | 70        |
| 6.4 Lineare periodische Kette . . . . .   | 73        |
| 6.5 Der gedämpfte harmonische Oszillator . . . . .                                    | 75        |
| 6.6 Oszillator mit harmonischer äußerer Kraft . . . . .                               | 76        |
| 6.7 Nichtlineare Schwingungsgleichungen . . . . .                                     | 78        |
| <b>7 Mechanik des starren Körpers</b>   | <b>81</b> |
| 7.1 Erhaltungsgrößen und Kinematik . . . . .  | 81        |
| 7.2 Dynamik des starren Körpers . . . . .   | 93        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>8</b> | <b>Prinzipie der Mechanik</b>                                    | <b>104</b> |
| 8.1      | Einige Aspekte der Variationsrechnung . . . . .                  | 104        |
| 8.2      | Hamilton'sches Prinzip . . . . .                                 | 108        |
| 8.3      | Erhaltungssätze und Invarianten . . . . .                        | 109        |
| 8.4      | Hamiltonfunktion und Hamiltonsche Bewegungsgleichungen . . . . . | 114        |
| 8.5      | Kanonische Transformation . . . . .                              | 118        |
| 8.6      | Hamilton-Jacobi-Theorie . . . . .                                | 122        |
| 8.7      | Poisson-Klammern in der Mechanik . . . . .                       | 124        |
| 8.8      | Satz von Liouville . . . . .                                     | 127        |

# 1 Was ist Theoretische Physik?

**Ziel** der Theoretischen Physik ist die Beschreibung von Erfahrungen der Natur durch eine mathematische Modellbildung. Gesucht ist eine Abbildung von realen Vorgängen mit der Ermöglichung von Vorhersagen. Das Ziel ist also anders als in der Mathematik. Die Mathematik sucht in sich widerspruchsfreie Theorien, die nicht notwendig reales Naturgeschehen beschreiben wollen. Der Maßstab ist das Experiment.

Darüber hinaus will die Theoretische Physik mathematische Beschreibungen liefern, die möglichst einfach sind. Dazu werden Idealisierungen verwendet: Die physikalischen Erscheinungen werden auf die wesentlichen Aspekte reduziert, Experimente werden auf spezifische Fragestellungen ausgelegt. Dies führt zu Konzepten wie „starrer Körper“ und „Massenpunkt“.

Der **Nutzen** einer physikalischen Theorie liegt in der Beschreibung von Naturvorgängen und in der Vorhersage experimenteller Ergebnisse.

## Warum beginnt die Vorlesungsreihe "Theoretische Physik" mit Mechanik?

- historische Gründe. Die Mechanik war die erste Theorie. Sie war Vorbild für andere Theorien.
- viele mathematische Methoden der Physik wurden auf dem Gebiet der Mechanik entwickelt.
- Grundlegende Größen (Energie, Masse, Impuls, ...) wurden in der Mechanik eingeführt und dann auf andere Theorien übertragen.
- Die Mechanik hängt unmittelbar mit unserer Erfahrungswelt zusammen.

## Grenzen und Erweiterungen der klassischen Mechanik

Jede physikalische Theorie ist nur begrenzt gültig. Die klassische Mechanik verliert ihre Gültigkeit bei...

- hohen Geschwindigkeiten (→ Modifizierung der Konzepte absoluter Raum, absolute Zeit in der speziellen Relativitätstheorie)
- Großen Massen (dann muß der Euklidische Raum durch einen Riemannschen ersetzt werden: Allgemeine Relativitätstheorie)
- kleinen Abständen. Das Wirkungsquantum mußte postuliert werden, um eine Theorie der Hohlraumstrahlung zu ermöglichen (→ Quantenmechanik)

## Einige Namen der klassischen Mechanik

|             |   |
|-------------|---|
| Archimedes: | Hebelgesetze, Schwerpunkt   |
| Galilei     | Fallgesetze (1640)  |
| Kepler:     | Planetenbahnen (1610)   |
| Descartes:  | Impulserhaltung (1645)  |
| Huygens:    | Infinitesimale Formulierung von Beschleunigungen (1675)           |
| Newton:     | Gravitationsgesetz aus den Keplerschen Gesetzen abgeleitet (1690) |

# 2 Mechanik von Massenpunkten

## Inhalt

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>2.1 Kinematische Aspekte</b> . . . . .   | <b>6</b>  |
| 2.1.1 Geometrische Beschreibung von Bahnen . . . . .                              | 6         |
| 2.1.2 Umkehrung der Zeitableitung: Integration . . . . .                          | 7         |
| 2.1.3 System von N Massenpunkten . . . . .  | 7         |
| <b>2.2 Newton'sche Bewegungsgleichungen</b> . . . . .                             | <b>8</b>  |
| 2.2.1 Die Newton'schen Gesetze . . . . .  | 8         |
| 2.2.2 Arbeit und konservative Kraftfelder . . . . .                               | 9         |
| <b>2.3 Der Energie-Erhaltungssatz in der Mechanik</b> . . . . .                   | <b>10</b> |
| <b>2.4 Lösung der Bewegungsgleichung für ein Teilchen mit einem Freiheitsgrad</b> | <b>11</b> |
| 2.4.1 Diskussion der Lösung . . . . .   | 12        |
| <b>2.5 Drehimpuls, Drehmoment, Zentralkraftfelder</b> . . . . .                   | <b>12</b> |
| 2.5.1 Drehimpuls und Drehmoment . . . . .   | 12        |
| 2.5.2 Zentralkraftgesetz . . . . .  | 12        |
| 2.5.3 Zentralkraftfeld . . . . .  | 13        |
| <b>2.6 Der Virialsatz</b> . . . . .   | <b>13</b> |
| <b>2.7 Lösung einfacher Bewegungsgleichungen</b> . . . . .                        | <b>14</b> |
| 2.7.1 Elektron im Magnetfeld . . . . .  | 14        |
| 2.7.2 Der schiefe Wurf . . . . .  | 14        |
| 2.7.3 Der schiefsymmetrische Wurf . . . . .                                       | 15        |
| <b>2.8 Bewegung im Zentralkraftfeld</b> . . . . .                                 | <b>16</b> |
| 2.8.1 allgemeiner Fall . . . . .  | 16        |
| 2.8.2 Das Keplerproblem . . . . .   | 19        |

---

## 2.1 Kinematische Aspekte

Zuerst brauchen wir einige Basics, nämlich die *Bezeichnungen*:

### 2.1.1 Geometrische Beschreibung von Bahnen

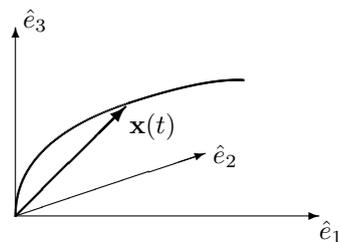
Der *Ort* eines Teilchens ist gegeben durch die Linearkombination  $\mathbf{x}(t) = x_1(t)\hat{e}_1 + x_2(t)\hat{e}_2 + x_3(t)\hat{e}_3$ . Die Zahlen

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (x_1, x_2, x_3)$$

heißen Koordinaten von  $\mathbf{x}$  (im gewählten Koordinatensystem).

Die *Geschwindigkeit* ist definiert durch

$$\mathbf{v}(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} =: \dot{\mathbf{x}}(t)$$



$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = (v_1, v_2, v_3)$  sind die Koordinaten der Geschwindigkeit,  $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$  der Betrag.

$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$  heißt Tangenteneinheitsvektor. Denn er ist parallel zu  $\mathbf{v}$ , also tangential zur Bahn und hat die Länge 1. Trivialerweise gilt mit dieser Definition  $\mathbf{v} = v|\mathbf{T}$ .

Die *Beschleunigung* ist auch über einen Differentialquotienten erklärt:

$$\mathbf{b}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

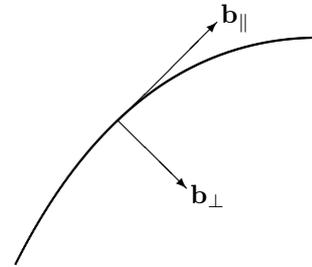
Mit

$$\mathbf{v} = v\mathbf{T}$$

wird hieraus nach der Produktregel:

$$\dot{\mathbf{v}} = \underbrace{\dot{v}\mathbf{T}}_{\mathbf{b}_{\parallel}} + v\underbrace{\dot{\mathbf{T}}}_{\mathbf{b}_{\perp}}$$

Die Beschleunigung läßt sich also in einen Anteil  $\mathbf{b}_{\parallel}$  parallel zu  $\mathbf{v}$  und einen Anteil  $\mathbf{b}_{\perp}$  senkrecht zu  $\mathbf{v}$  zerlegen<sup>1</sup>.



### 2.1.2 Umkehrung der Zeitableitung: Integration

Es gilt:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t_0) + \int_{t_0}^t \ddot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau,$$

Die *Länge* eines hinreichend kleinen Bahnstückes ist gegeben durch  $\Delta s = v(t)\Delta t = |\dot{\mathbf{x}}|\Delta t$ . Integration liefert die Länge  $s_{12}$  der Bahnkurve:

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{x}}(\tau)| d\tau$$

### 2.1.3 System von N Massenpunkten

$t$  sei eine universelle Zeit, d.h. für jedes Teilchen gilt dieselbe Zeit  $t$  unabhängig von irgendwelchen Geschwindigkeiten, Beschleunigungen o. ä. Nun gibts wieder ein paar Namen:

|   |  |
|---|--|
| $\mathbf{x}^{(i)}$                                  | Position (Ort) des $i$ -ten Teilchens            |
| $\mathbf{x}^{(i)}(t)$                               | Bahn des $i$ -ten Teilchens                      |
| $(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)})$       | Position des Systems im sog. Konfigurationsraum. |
| $(\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(N)}(t))$ | Bahn des Systems im Konfigurationsraum.          |

*Verallgemeinerte Koordinaten:*  $3N$  Zahlen  $u_1, \dots, u_{3N}$  heißen verallg. Koordinaten, wenn man die Positionen aller Teilchen als Funktionen dieser verallg. Koordinaten ausdrücken kann:

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i)}(u_1, \dots, u_{3N}) \quad , i = 1, \dots, N$$

Man kann also stets aus diesen  $3N$   $u$ 's die Positionen  $\mathbf{x}^{(i)}$  bestimmen.

<sup>1</sup> $\mathbf{b}_{\perp}$  steht wirklich senkrecht auf  $\mathbf{b}_{\parallel}$ :

Da  $\mathbf{T}$  stets die Länge 1 hat, gilt  $\mathbf{T}^2 = 1$ . Ableiten nach  $t$  liefert  $2\mathbf{T}\dot{\mathbf{T}} = 0$ . Also steht  $\mathbf{T}$  senkrecht auf  $\dot{\mathbf{T}}$ .

## 2.2 Newton'sche Bewegungsgleichungen

Bei den Newton'schen Gleichungen handelt es sich um dynamische Gleichungen, die die Bahnen der Teilchen bestimmen. Wir betrachten ein System von  $N$  Massenpunkten und verwenden die folgenden Bezeichnungen:

Bahnen:  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}$

Massen:  $m_1, \dots, m_N$

Kräfte:  $\mathbf{K}^{(1)}, \dots, \mathbf{K}^{(N)}$  (Dies ist die Kraft auf das jeweilige Teilchen)

### 2.2.1 Die Newton'schen Gesetze

Die folgenden Gesetze sind aus der Erfahrung gewonnen und lassen sich nicht herleiten:

1. In einem Inertialsystem ist ein kräftefreier Massenpunkt in Ruhe oder bewegt sich gleichförmig entlang einer Geraden.

2. Es gilt:

$$\dot{\mathbf{p}}^{(i)} = \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{x}}^{(i)}) = \mathbf{K}^{(i)}. \quad (2.1)$$

Für konstante Massen vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{K}^{(i)} \quad (2.2)$$

3. action gleich reactio:

$$\mathbf{K}^{ij} = -\mathbf{K}^{ji} \quad (2.3)$$

4. Kräfte sind Vektoren.

#### Anmerkungen

a.) Ein *Inertialsystem* ist ein Bezugssystem,

- bzgl. dessen der Raum homogen und isotrop ist,
- und das homogen bzgl. der Zeit ist.

*Homogen* bedeutet, daß zu jedem Zeitpunkt an jedem Ort im Raum die gleichen Gesetze gelten. *Isotrop* heißt, daß der Raum in jeder Richtung gleich ist. Es gibt keine ausgezeichnete Richtung.

b.) Bei den Bewegungsgleichungen handelt es sich i.a. um  $3N$  gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

c.) Die **Kräfte** lassen sich einteilen in

|                      |                                   |            |
|----------------------|-----------------------------------|------------|
| Fundamentale Kräfte: | Gravitation                       | $10^{-40}$ |
|                      | schwache Wechselwirkung           | $10^{-5}$  |
|                      | elektromagnetische Wechselwirkung | $10^{-2}$  |
|                      | starke Wechselwirkung             | 10         |

und abgeleitete Kräfte: Elastische Kräfte (Feder: linear,  $\mathbf{K} \sim \Delta \mathbf{l}$ )  
 Reibungskräfte (Stokes'sche Reibung:  $\mathbf{K} = -k \mathbf{v}$ )  
 Chemische Bindungskräfte ( $\rightarrow$  Quantenmechanik)

(bei den fundamentalen Kräften sind die relativen Stärken mitangegeben.)

d.) Die Kräfte können vom Ort und von der Geschwindigkeit der Teilchen sowie von der Zeit abhängen:

$$\mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{K}^{(i)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}, \dot{\mathbf{x}}^{(1)}, \dots, \dot{\mathbf{x}}^{(N)}, t)$$

e.) Meist läßt sich die Kraft folgendermaßen zerlegen:

$$\mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{K}^{(i)}(\mathbf{x}^{(i)}, \dot{\mathbf{x}}^{(i)}, t) + \sum_j \mathbf{K}^{ij}(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)})$$

(Hierbei wurde  $\mathbf{K}^{ii} = 0$  gesetzt) Der erste Summand hängt nur vom aktuellen Zustand des Teilchens, auf das die Kraft wirkt, ab. Die Summe besteht aus Summanden, die nur vom *Ort zweier* Teilchen abhängen.

## 2.2.2 Arbeit und konservative Kraftfelder

### Arbeit

Bei der Bewegung des Systems von einem Anfangspunkt  $\mathbf{x}_A^{(i)}$  zu einem Endpunkt  $\mathbf{x}_B^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) entlang einer Bahn im Phasenraum wird die Arbeit  $W_{AE}$  vom Kraftfeld geleistet:

$$W_{AE} = \int_{\text{Bahn}} \sum_{i=1}^N \mathbf{K}^{(i)} d\mathbf{x}^{(i)} = \int_{t_A}^{t_B} \sum_{i=1}^N \mathbf{K}^{(i)} \frac{d\mathbf{x}^{(i)}}{dt} dt$$

### Konservative Kraftfelder

Ein Kraftfeld  $\mathbf{K}^{(i)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)})$  heißt konservativ, wenn die Arbeit entlang jedes geschlossenen Weges verschwindet.

Ist ein Kraftfeld konservativ, so existiert ein Potential  $V = V(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)})$  mit

$$\mathbf{K}^{(i)} = -\nabla_i V(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}).$$

Hierbei ist  $\nabla_i = \left( \frac{\partial}{\partial x_1^{(i)}}, \frac{\partial}{\partial x_2^{(i)}}, \frac{\partial}{\partial x_3^{(i)}} \right)$  der Gradient nach  $\mathbf{x}^{(i)}$ . Es gilt

$$V(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}) = - \int_{(\mathbf{x}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_0^{(N)})}^{(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)})} \sum_i \mathbf{K}^{(i)}(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(N)}) d\xi^{(i)}. \quad (2.4)$$

Das Integral ist über einen beliebigen Weg von  $(\mathbf{x}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_0^{(N)})$  nach  $(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)})$  zu nehmen. Da es sich um ein konservatives Kraftfeld handelt, ergeben alle Wege den gleichen Wert. Daß diese Formel wirklich ein Potential ergibt, erkennt man durch Nachrechnen. Wir wollen uns hier auf den Beweis für ein Teilchen (d.h.  $N = 1$ ) beschränken; der Beweis für mehrere Teilchen verläuft analog, es treten lediglich einige Summenzeichen auf.

Der Potentialunterschied zwischen zwei benachbarten Punkten ist

$$V(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}) \approx \nabla V(\mathbf{x}) \Delta\mathbf{x}$$

Andererseits ist nach Definition (2.4):

$$V(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}} \mathbf{K} d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{K} d\mathbf{x} = - \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}} \mathbf{K} d\mathbf{x} \approx -\mathbf{K} \Delta\mathbf{x}$$

Da diese Rechnung für alle (genügend kleinen)  $\Delta\mathbf{x}$  gilt, folgt durch Vergleich der letzten beiden Formeln

$$\mathbf{K} = -\nabla V$$

**Beispiel : Zwei Teilchen in einer Dimension**

Es sei

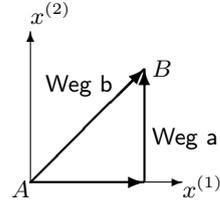
$$K^{(1)} = \lambda (x^{(1)} + x^{(2)}), \quad K^{(2)} = \lambda x^{(2)}$$

Ist dieses Kraftfeld konservativ?

Wir berechnen für zwei verschiedene Wege von  $A = (0, 0)$  nach  $B = (1, 1)$  die jeweils geleistete Arbeit:

$$\text{Weg a: } W_a = \lambda \int_0^1 x^{(1)} dx^{(1)} + \lambda \int_0^1 x^{(2)} dx^{(2)} = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\lambda = \lambda$$

$$\text{Weg b: } W_b = \lambda \int_0^1 (2t, t)(1, 1) dt = 3\lambda \int_0^1 t dt = \frac{3}{2}\lambda$$

Wegen  $W_a \neq W_b$  ist dieses Kraftfeld also nicht konservativ.Das **wichtigste Kriterium** für die Existenz eines Potentials bei einem Teilchen ist

$$\nabla \times \mathbf{K} = 0.$$

Wenn diese Bedingung auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet erfüllt ist, besitzt  $\mathbf{K}$  dort ein Potential.Bei  $N$  Teilchen werden aus den drei Komponenten von  $\mathbf{K}$  die  $3N$  Komponenten  $K_i = K_i(x_1, \dots, x_{3N})$ ,  $i = 1, \dots, 3N$ . Gilt nun für alle  $i \neq j$ 

$$\frac{\partial K_i}{\partial x_j} = \frac{\partial K_j}{\partial x_i},$$

so existiert ein Potential.

**2.3 Der Energie-Erhaltungssatz in der Mechanik**Wir werden nun eine leicht geänderte Notation verwenden. Die Unterteilung  $(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)})$  der  $3N$  Zahlen, die die Lage der Punkte beschreiben, in  $N$  3-Tupel ist ziemlich unhandlich. Stattdessen schreiben wir  $(x_1, \dots, x_{3N})$ . Nun bezeichnen also die Zahlen  $x_1, x_2, x_3$  die Koordinaten des ersten Punktes,  $x_4, x_5, x_6$  die des zweiten Punktes, usw.Weiterhin sei  $\mathbf{m} = (m^{(1)}, m^{(1)}, m^{(1)}, m^{(2)}, m^{(2)}, m^{(2)}, \dots, m^{(N)}, m^{(N)}, m^{(N)})$ .

Durch diese Definition läßt sich die kinetische Energie sehr bequem schreiben:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m^{(i)}}{2} (\dot{\mathbf{x}}^{(i)})^2 = \sum_{\alpha=1}^{3N} \frac{m_\alpha}{2} \dot{x}_\alpha^2$$

**Behauptung:** Für konservative Kraftfelder mit dem Potential  $V$  gilt entlang einer Bahn:

$$T + V = \text{const.}$$

**Herleitung** aus den Newton'schen Gesetzen: Da  $V$  ein Potential ist, gilt

$$m_\alpha \ddot{x}_\alpha = K_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} V(x_1, \dots, x_{3N})$$

Multiplikation mit  $\dot{x}_\alpha$  liefert:

$$m_\alpha \dot{x}_\alpha \ddot{x}_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial x_\alpha} \dot{x}_\alpha$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_\alpha^2 \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_\alpha} \dot{x}_\alpha \quad \left| \sum_{\alpha=1}^{3N} \right.$$

$$\frac{d}{dt}T = - \sum_{\alpha=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_{\alpha}} \dot{x}_{\alpha} = - \frac{dV}{dt}$$

Das letzte „=“ ist so wichtig, daß es sich lohnt, drei Tage darauf zu verwenden, die nächsten beiden Bemerkungen zu *verstehen*:

- Wenn man irgendeine Gleichung oder Folgerung nicht versteht, ist es häufig hilfreich, sie in der anderen Richtung zu betrachten. Das wollen wir jetzt tun:
- Was ist  $\frac{dV}{dt}$ ?

$V$  hängt von den Variablen  $x_1, \dots, x_{3N}$  ab, die ihrerseits wieder von  $t$  abhängen:  $x_1 = x_1(t), \dots$ . Wir brauchen also  $\frac{d}{dt}V(x_1(t), \dots, x_{3N}(t))$ . Das ist ein klassischer Fall für die Kettenregel:

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), \dots, x_{3N}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_{3N}} \frac{dx_{3N}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_{\alpha}} \dot{x}_{\alpha}$$

Womit das letzte „=“ nachgerechnet wäre. Bringt man nun noch  $\frac{dV}{dt}$  auf die andere Seite, so steht da

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0, \quad T + V = \text{const.}$$

Genau das, was wir wollten!

## 2.4 Lösung der Bewegungsgleichung für ein Teilchen mit einem Freiheitsgrad

Nach ziemlich vielem sehr theoretischen Vorgeplänkel wird's nun so langsam konkreter. Wir fangen an zu rechnen! Wir betrachten nun ein Teilchen, das sich im eindimensionalen Potential  $V(x)$  bewegt. Newton lautet nun:

$$m\ddot{x} = - \frac{dV}{dx}$$

Wenn wir diese Gleichung mit  $\dot{x}$  multiplizieren,

$$m\dot{x}\ddot{x} = - \frac{dV}{dx} \dot{x},$$

dann sehen wir, daß links die zeitliche Ableitung von  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$  steht, und rechts die zeitl. Ableitung von  $V(x(t))$  (nachdifferenzieren!). Ergo:

$$m \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) = - \frac{d}{dt} V(x)$$

Also gilt

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = \text{const.} \equiv E \quad (2.5)$$

Das ist wieder der Energiesatz. Wir hätten natürlich auch gleich an dieser Stelle anfangen können. Die nächsten drei Zeilen heißen „Trennung der Variablen“:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \pm \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{E - V(x)}} \\ dt &= \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}} \\ t - t_0 &= \pm \int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x'))}} dx' \end{aligned} \quad (2.6)$$

Wir erhalten also  $t = t(x)$ . Umkehrung dieser Gleichung liefert  $x(t)$ .

## 2.4.1 Diskussion der Lösung

- a.) Wegen (2.5) muß stets  $E \geq V(x)$  sein. Bereiche  $E < V(x)$  sind verboten.
- b.) Aus  $V(x) = E$  folgt nach (2.5)  $\dot{x} = 0$ . Dies entspricht dem Wendepunkt der Bahn. Bei der physikalischen Lösung ändert sich an solchen Punkten das Vorzeichen der Wurzel in (2.6).

## 2.5 Drehimpuls, Drehmoment, Zentralkraftfelder

### 2.5.1 Drehimpuls und Drehmoment

Zuerst die Definitionen:

$$\text{Drehimpuls: } \mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

$$\text{Drehmoment: } \mathbf{M} := \mathbf{r} \times \mathbf{K} = m \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$

Wegen  $\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = m\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{M}$  gilt:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{M} \quad (2.7)$$

Weiterhin gilt stets

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = 0, \quad (2.8)$$

denn der Vektor  $\mathbf{r}$  steht senkrecht auf  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ .

Im Gegensatz zum Impuls ist der Drehimpuls abhängig von der Wahl des Koordinatenursprungs!

### 2.5.2 Zentralkraftgesetz

Man spricht von einem *Zentralkraftgesetz*, wenn die Kraft stets auf einen Punkt  $\mathbf{r}_0$  hin- bzw. wegweist, wenn sie also stets in Richtung der Verbindungslinie wirkt.

Wählt man diesen Punkt als Koordinatenursprung (d.h.  $\mathbf{r}_0 = 0$ ), so erhält man:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \hat{e}_r \quad (2.9)$$

In diesem Fall gilt Drehimpulserhaltung, denn die Ableitung  $\frac{d}{dt}\mathbf{L}$  verschwindet:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{K} = \mathbf{r} \times \left( \frac{f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r} \right) = \frac{f(\dots)}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{L} = \text{const.} \equiv \mathbf{L}_0$$

Wegen (2.8),  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = 0$ , verläuft die Bahn dieses Teilchens in einer Ebene senkrecht zu  $\mathbf{L}_0$ , falls  $\mathbf{L}_0 \neq 0$ .

Und es gilt der **Flächensatz**:

Der Strahl des Ortsvektors überstreicht bei Zentralkraftfeldern in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Nachweis:

Die vom Ortsvektor während der Zeit  $dt$  überstrichene Fläche ist gerade die halbe Fläche des von  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}dt$  aufgespannten Parallelogramms:

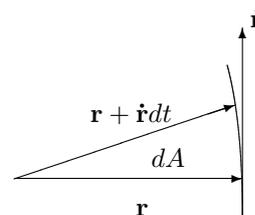
$$dA = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times (\mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}dt)| = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| dt$$

Daraus folgt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = \frac{1}{2m} |m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = \frac{1}{2m} |\mathbf{L}_0| = \text{const.}$$

Integration liefert

$$A = \frac{|\mathbf{L}_0|}{2m} (t - t_0)$$



### 2.5.3 Zentralkraftfeld

Hängt die Funktion  $f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  in (2.9) nur von der Zeit und dem Betrag von  $\mathbf{r}$  ab, so spricht man von einem *Zentralkraftfeld*. Es handelt sich also um einen Spezialfall des Zentralkraftgesetzes.

$$\mathbf{K} = f(r, t) \frac{\mathbf{r}}{r} = f(r, t) \hat{e}_r$$

Das Zentralkraftfeld wird später noch ausführlich besprochen werden (Stichwort: Kepler-Problem). Jetzt wollen wir nur zeigen, daß es ein Potential hat.

Um ein Potential zu erhalten, setzen wir einfach

$$V = - \int^r f(r') dr'$$

mit irgendeiner unteren Grenze. Nachrechnen zeigt, daß dieses  $V$  wirklich ein Potential ist.

$$\nabla V(|\mathbf{r}|) = \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = -f \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = -\mathbf{K}$$

Natürlich funktioniert auch der Test mit der Rotation. Sie verschwindet:

$$\text{rot } \mathbf{K} = \nabla \times \left( f(r, t) \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = (\nabla f) \times \frac{\mathbf{r}}{r} + \underbrace{\left( \nabla \times \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right)}_{=0} f = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \times \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} + 0 = 0$$

## 2.6 Der Virialsatz

Er liefert eine Aussage über die zeitlichen Mittelwerte der mechanischen Größen kinetische Energie und „Virial“. Die Herleitung ist ziemlich kurz:

Aus  $m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}$  folgt durch Multiplikation mit  $\mathbf{r}$

$$m \mathbf{r} \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} (m \dot{\mathbf{r}} \mathbf{r}) - m \dot{\mathbf{r}}^2 = \mathbf{K} \mathbf{r}$$

(so Ihr das erste „=“ nicht versteht, erinnert Euch an die erste Bemerkung auf Seite 11!) und hieraus durch Integration

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \left( \frac{d}{dt} (m \dot{\mathbf{r}} \mathbf{r}) - m \dot{\mathbf{r}}^2 - \mathbf{K} \mathbf{r} \right) dt = 0$$

Annahme: Es handle sich um eine räumlich beschränkte Bewegung (z.B. periodisch). Dann ist

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \frac{d}{dt} (m \dot{\mathbf{r}} \mathbf{r}) dt = \frac{1}{\tau} m \dot{\mathbf{r}} \mathbf{r} \Big|_{t_0}^{t_0 + \tau}$$

beschränkt, beim Grenzübergang verschwindet dieser Summand wegen des Faktors  $\tau^{-1}$ . Die beiden verbleibenden Integrale entsprechen genau den Mittelwerten der kinetischen Energie und dem sog. Virial. Mit

$$\overline{T} := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 dt \quad \text{und} \quad \overline{\mathbf{K} \mathbf{r}} := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \mathbf{K} \mathbf{r} dt$$

ergibt sich also schließlich der Virialsatz:

$$2 \overline{T} = -\overline{\mathbf{K} \mathbf{r}} \quad (2.10)$$

### Spezialfälle

für konservative Kräfte ist  $\mathbf{K} = -\nabla V$ :  $\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\nabla V \cdot \mathbf{r}}$

beim Zentralfeld ist  $\mathbf{K} = -V'(r)\hat{e}_r$ :  $\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{V' r}$

für Potenzgesetze  $V \sim r^{n+1}$  bzw.  $\mathbf{K} \sim r^n \hat{e}_r$ :  $\bar{T} = \frac{n+1}{2} \bar{V}$

### Beispiele:

Bei Gravitationskräften ist  $K \sim r^{-2}$ , also  $n = -2$ . Daraus folgt

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \bar{V}$$

$$E_{tot} = T + V = \bar{T} + \bar{V} = \frac{1}{2} \bar{V} = -\bar{T}$$

Bei der Feder bzw. beim harmonischen Oszillator gilt  $K \sim r$  und  $n = 1$ :

$$\bar{T} = \bar{V} = \frac{1}{2} E_{tot}$$

Wir können also, ohne irgendeine Gleichung zu lösen, bereits Vorhersagen über die Mittelwerte machen!

## 2.7 Lösung einfacher Bewegungsgleichungen

### 2.7.1 Elektron im Magnetfeld

Die Bewegungsgleichung eines Elektrons im Magnetfeld lautet

$$m \dot{\mathbf{v}} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.11)$$

Skalare Multiplikation mit  $\mathbf{v}$  liefert

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 \right) = m \mathbf{v} \dot{\mathbf{v}} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \mathbf{v} = 0.$$

Also ist  $\mathbf{v}^2 = const.$  und damit auch  $|\mathbf{v}| = const.$  Es wird keine Arbeit geleistet.

Skalare Multiplikation von (2.11) mit  $\mathbf{B}$  ergibt:  $\frac{d}{dt}(\mathbf{B} \mathbf{v}) = 0$ . Die Projektion von  $\mathbf{v}$  auf  $\mathbf{B}$  bleibt also konstant.

### 2.7.2 Der schiefe Wurf

Die Schwerkraft möge in negativer  $\hat{e}_3$ -Richtung wirken. Dann gilt

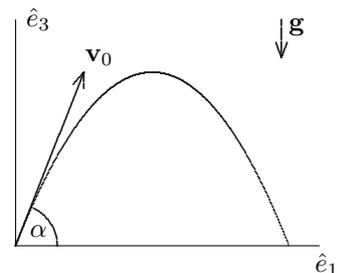
$$m \ddot{\mathbf{r}} = -m g \hat{e}_3$$

Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{r}(0) = 0, \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}(0) = v_0(\hat{e}_1 \cos \alpha + \hat{e}_3 \sin \alpha)$$

Nun kann man direkt integrieren:

$$\dot{\mathbf{v}} = -g \hat{e}_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_0^t -g \hat{e}_3 dt = -gt \hat{e}_3 + \mathbf{v}_0$$



$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ 0 \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} - gt \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus  $\mathbf{v}(t)\hat{e}_3 \stackrel{!}{=} 0$ , also  $v_0 \sin \alpha - gt = 0$ , gewinnt man die Steigzeit  $T = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ .

Integriert man nochmals, erhält man  $\mathbf{r}$  (hierbei ist  $\mathbf{r}_0 = 0$ ):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v} dt = -\frac{g}{2}t^2\hat{e}_3 + \mathbf{v}_0 t$$

In der nächsten Zeile sind die Komponenten dieser Gleichung ausgeschrieben. Aus ihnen gewinnt man durch Elimination von  $t$  die Gleichung der Bahnkurve.

$$\left. \begin{array}{l} z = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t \sin \alpha \\ x = v_0 t \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Bahnkurve: } z = -\frac{g}{2} \left( \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + x \tan \alpha \quad (\text{Parabel})$$

Die Dauer  $t_0$  und die Wurfweite wird durch  $z(t_0) = 0$  bestimmt. Da die Bewegung symmetrisch ist, gilt  $t_0 = 2T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ . Daraus folgt

$$l = x(t_0) = t_0 v_0 \cos \alpha = \frac{2v_0^2}{g} \cos \alpha \sin \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

Die Wurfweite ist also bei  $\alpha = 45^\circ$  maximal.

### 2.7.3 Der schiefsymmetrische Wurf

Nun kommt zur Schwerkraft noch eine Reibungskraft hinzu, die wir proportional zur Geschwindigkeit ansetzen<sup>2</sup>. Damit ergibt sich folgende Differentialgleichung für  $\mathbf{v}$ :

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\beta \mathbf{v} - mg\hat{e}_3$$

Die Anfangsbedingungen lauten

$$\mathbf{r}(0) = 0, \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = v_0(\hat{e}_1 \cos \alpha + \hat{e}_3 \sin \alpha)$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist die Summe aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung  $\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\beta}{m}\mathbf{v} - g\hat{e}_3$  und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung  $\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\beta}{m}\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_h$$

Eine inhomogene Lösung ist, wie man leicht verifiziert

$$\mathbf{v}_i = -\frac{mg}{\beta}\hat{e}_3$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_{h0} e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

Die Konstante  $\mathbf{v}_{h0}$  läßt sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen:

$$\mathbf{v}_i(0) + \mathbf{v}_h(0) \stackrel{!}{=} v_0(\hat{e}_1 \cos \alpha + \hat{e}_3 \sin \alpha) \Rightarrow \mathbf{v}_{h0} = \hat{e}_1 v_0 \cos \alpha + \hat{e}_3 \left( \frac{mg}{\beta} + v_0 \sin \alpha \right) \quad (2.12)$$

<sup>2</sup>Das gilt z.B. für kleine Kugeln, die sich langsam durch eine Flüssigkeit bewegen. Aber man kanns rechnen.

Damit ist

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \mathbf{v}_h + \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{h0} \exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right) - \frac{mg}{\beta} \hat{e}_3$$

Integration liefert (mit  $\mathbf{r}(0) = 0$ )

$$\mathbf{r}(t) = \int_0^t \mathbf{v} dt = \left[ -\frac{m}{\beta} \mathbf{v}_{h0} e^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{mg}{\beta} t \hat{e}_3 \right]_0^t = -\frac{m}{\beta} \mathbf{v}_{h0} \exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right) - \frac{mg}{\beta} \hat{e}_3 t + \frac{m}{\beta} \mathbf{v}_{h0}$$

Setzt man noch  $\mathbf{v}_{h0}$  aus (2.12) ein, ergibt sich schließlich

$$\mathbf{r} = \frac{m}{\beta} v_0 \cos \alpha \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) \hat{e}_1 + \left[ \left(\frac{m^2 g}{\beta^2} + \frac{m}{\beta} v_0 \sin \alpha\right) \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) - \frac{mg}{\beta} t \right] \hat{e}_3 \quad (2.13)$$

Eliminiert man aus den beiden Gleichungen (2.13) die Zeit  $t$ , so erhält man die Bahnkurve:

$$z(x) = \frac{m^2 g}{\beta^2} \ln\left(1 - \frac{\beta x}{m v_0 \cos \alpha}\right) + \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{\beta}\right) \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad (2.14)$$

Das waren die Rechnungen, jetzt folgt eine kurze Diskussion:

- Für  $t \rightarrow \infty$  bleibt die  $\hat{e}_1$  Komponente von  $\mathbf{r}$  beschränkt. Die Wurfweite ist also beschränkt. Die maximale Wurfweite ergibt sich für  $t \rightarrow \infty$  zu

$$x_{max} = \frac{m}{\beta} v_0 \cos \alpha$$

- Weiterhin gibt es eine asymptotischen Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v}(t \rightarrow \infty) = -\frac{mg}{\beta} \hat{e}_3$$

- Der Logarithmus in (2.14) ist nur für  $x < \frac{m}{\beta} v_0 \cos \alpha$  definiert. Das ist wieder die maximale Wurfweite.
- Für  $\beta \rightarrow 0$  erhält man mit der Reihenentwicklung  $\ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots$  die Lösung aus (2.7.2), was ja durchaus zu erwarten war.

## 2.8 Bewegung im Zentralkraftfeld

### 2.8.1 allgemeiner Fall

Wir betonen, daß folgende Überlegungen für *alle* Zentralkraftfelder gelten und nicht nur für das bekannteste Beispiel, das Kepler-Problem.

**Zur Wiederholung:** Beim Zentralkraftfeld wirkt die Kraft stets in Richtung der Verbindungslinie zu einem festen Punkt und hängt nur vom Abstand und der Zeit ab:  $\mathbf{K} = f(|\mathbf{r}|, t) \hat{e}_r$

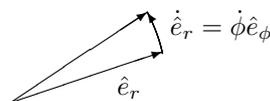
Wir haben bereits in (2.5.2) gesehen, daß die Bewegung in einer Ebene senkrecht zum Drehimpuls  $\mathbf{L}_0$  verläuft. Deswegen darf man ebene Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  einführen:

Wir haben

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbf{r} = r \hat{e}_r$$



hieraus folgt<sup>3</sup>:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\hat{e}_r) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi$$

Oder ausgeschrieben:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \phi$$

Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit zu

$$\mathbf{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

Nun werden wir die Bewegungsgleichungen lösen. Der Energiesatz  $\frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + V(r) = E$  lautet also in Polarkoordinaten:

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) = E, \quad (2.15)$$

Der Drehimpulssatz  $m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{L}_0$  lautet

$$mr^2\dot{\phi} = L_0$$

oder

$$\dot{\phi} = \frac{L_0}{mr^2} \quad (2.16)$$

$\dot{\phi}$  hat stets das gleiche Vorzeichen, da  $L_0$  (falls  $L_0 \neq 0$ ),  $m$  und  $r^2$  nicht ihre Vorzeichen ändern. Also nimmt  $\phi$  monoton zu oder ab, der Umlaufsinn des Massenpunktes ändert sich also nicht.

Setzt man dies in (2.15) ein, ergibt sich

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} + V(r) = E \quad (2.17)$$

In (2.15) und (2.17) erkennt man, daß die kinetische Energie in einen radialen Anteil  $\frac{m}{2}\dot{r}^2$  und in die Rotationsenergie  $\frac{m}{2}r^2\dot{\phi}^2 = \frac{L_0^2}{2mr^2}$  zerfällt.

(2.17) können wir integrieren. Dazu lösen wir zuerst auf

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{L_0^2}{2mr^2} \right)} \quad (2.18)$$

und trennen die Variablen

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{L_0^2}{2mr^2} \right)}}.$$

Jetzt wird integriert:

$$t - t_0 = \pm \int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{eff}(r))}}$$

<sup>3</sup>Die Ableitungen der Basisvektoren kann man in Komponentenschreibweise ausrechnen:

$$\dot{\hat{e}}_r = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{\phi} \cos \phi \end{pmatrix} = \dot{\phi} \hat{e}_\phi$$

Analog erhält man

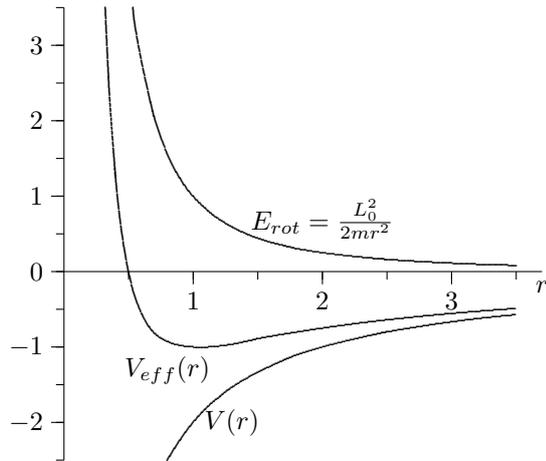
$$\dot{\hat{e}}_\phi = -\dot{\phi} \hat{e}_r$$

Hierbei wurde bereits das effektive Potential

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2}$$

benutzt.

Dies ist genau dieselbe Gleichung wie (2.6), die wir bereits bei der eindimensionalen Bewegung eines Teilchens erhielten. Der Abstand  $r$  vom Zentrum ändert sich also bei der Bewegung im Zentralkraftfeld  $V(r)$  genauso wie der Ort eines Teilchens bei eindimensionaler Bewegung im Potential  $V_{eff}(r)$ . Die 1-dim Bewegung des Teilchens in einem Potential kann nur dann beschränkt sein, wenn das Potential ein Minimum hat (und die Energie  $E$  geeignet gewählt wurde). Also muß das effektive Potential  $V_{eff}$  ein Minimum haben, wenn beschränkte Umlaufbahnen möglich sein sollen. Das heißt z.B. daß das Potential  $V(r)$  für kleine  $r$  schwächer als mit  $-1/r^2$  abfallen muß.



Oft interessiert nur die Bahn  $r(\phi)$  und nicht die Bahnkurve  $r(t)\hat{e}_r(t) = (r(t)\cos\phi(t), r(t)\sin\phi(t))$ .

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\dot{r} = \frac{dr(\phi(t))}{dt} = \frac{dr(\phi)}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi}$$

Nun teilen wir durch  $\dot{\phi}$  und verwenden (2.16) und (2.18):

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} = \pm \frac{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))}}{\frac{L_0}{mr^2}} = \pm \frac{\sqrt{2m}}{L_0} r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)}$$

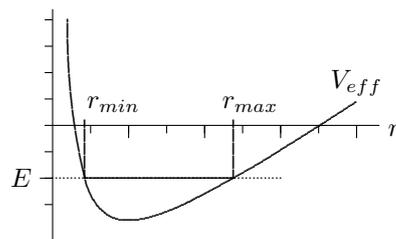
Trennung der Variablen liefert

$$\phi - \phi_0 = \pm \frac{L_0}{\sqrt{2m}} \int_{r(\phi_0)}^{r(\phi)} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V_{eff}(r')}} \quad (2.19)$$

Ist  $E - V_{eff} \geq 0$  für  $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ , so oszilliert  $r$  zwischen  $r_{min}$  und  $r_{max}$ , während  $\phi$  monoton zunimmt.

Während einer halben Periode ändert sich  $\phi$  um

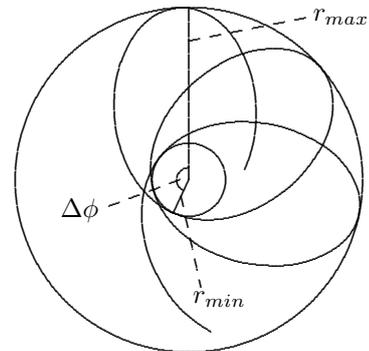
$$\Delta\phi = \frac{L_0}{\sqrt{2m}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$



Ist  $n\Delta\phi = m\pi$  für  $n, m \in \mathbf{N}$ , so ist die Bahn geschlossen.

Wenn  $E$  gleich dem minimalen Wert ist, also  $E = E_{min}$ , dann folgt  $r_{min} = r_{max} = r \equiv r_0 = \text{const}$ . Die Bahn ist ein Kreis, und es gilt wegen (2.16)

$$\phi(t) = \frac{L_0}{mr_0^2} (t - t_0) + \phi_0$$



Ist  $V_{eff}$  für große  $r$  beschränkt, d.h.  $V_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( V(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2} \right) < \infty$ , dann kann  $V_\infty \equiv 0$  gesetzt werden. Es gilt dann

Für  $E < 0$  sind die Bahnen beschränkt.

Für  $E > 0$  gehen die Bahnen nach  $\infty$ . Wegen  $\dot{r} \rightarrow \sqrt{\frac{2E}{m}}$  für  $r \rightarrow \infty$  gilt

$$r \rightarrow r_0 + \sqrt{\frac{2E}{m}}t$$

Mit irgendeinem  $r_0$ . Also bleibt auch  $\phi$  beschränkt:

$$\varphi(\infty) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \dot{\phi} dt = \frac{L_0}{m} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{r(t)^2} \approx \frac{L_0}{m} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{\left( r_0 + \sqrt{\frac{2E}{m}}t \right)^2} < \infty$$

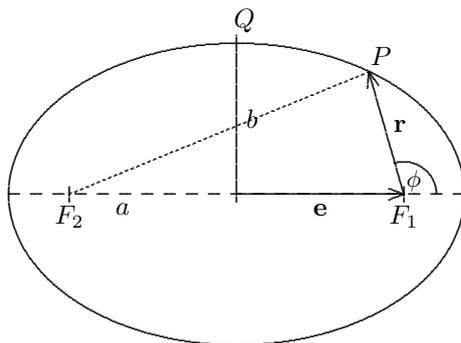
Also nähert sich die Bahn für  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$  einer Geraden an.

## 2.8.2 Das Keplerproblem

Bevor wir loslegen können, brauchen wir noch ein wenig mathematisches Rüstzeug. Nämlich...

### Darstellung der Kegelschnitte in Polarkoordinaten

#### Ellipse



Die Summe der Abstände der Punkte der Ellipse zu ihren beiden Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$  ist konstant:

$$\text{Ellipse} = \{P | \overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = 2a\}$$

Sei  $\mathbf{e}$  der Vektor vom Ellipsenmittelpunkt zu einem Brennpunkt. Setzt man speziell den Punkt  $Q$  in die Bestimmungsgleichung ein, erhält man

$$b^2 = a^2 - e^2.$$

Die Exzentrizität der Ellipse ist gegeben durch

$$\varepsilon := \frac{|\mathbf{e}|}{a} < 1.$$

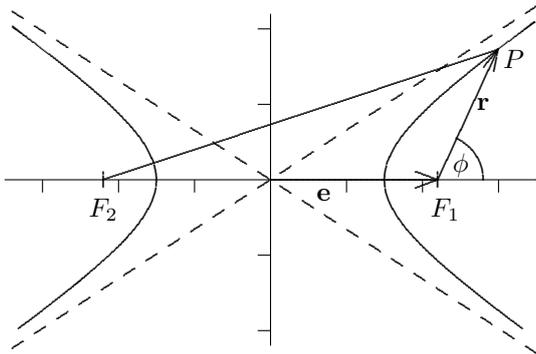
Aus diesen beiden Formeln folgt nun

$$b^2 = a^2 - a^2 \varepsilon^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) \quad (2.20)$$

Herleitung der Ellipsengleichung in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}| + |\mathbf{r} + 2\mathbf{e}| &= 2a \\ |\mathbf{r} + 2\mathbf{e}| &= 2a - |\mathbf{r}| = 2a - r \\ (\mathbf{r} + 2\mathbf{e})^2 &= (2a - r)^2 \\ r^2 + 4\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} + 4e^2 &= 4a^2 - 4ar + r^2 \\ a\varepsilon r \cos \phi + e^2 &= a^2 - ar \\ ar(1 + \varepsilon \cos \phi) &= a^2 - e^2 = b^2 \\ r &= \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi} \quad \text{mit} \quad p = \frac{b^2}{a} \end{aligned} \quad (2.21)$$

#### Hyperbel



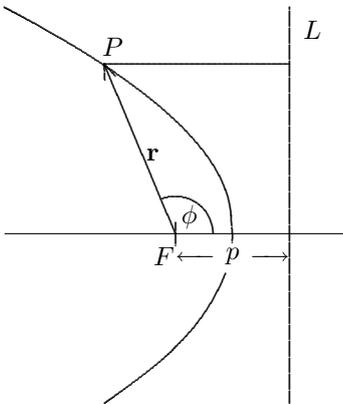
Bei der Hyperbel ist die Differenz der Abstände zu den beiden Brennpunkten konstant: Hyperbel =  $\{P|\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = \pm 2a\}$ . Es gilt  $\varepsilon = \frac{|e|}{a} > 1$ .

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} + 2\mathbf{e}| - |\mathbf{r}| &= \pm 2a \\ r^2 + 4\mathbf{e}\mathbf{r} + 4e^2 &= r^2 + 4a^2 \pm 4ar \\ \varepsilon ar \cos \phi + e^2 &= a^2 \pm ar \\ ar(\pm 1 - \varepsilon \cos \phi) &= e^2 - a^2 \end{aligned}$$

Also

$$r = \frac{\pm p}{1 \mp \varepsilon \cos \phi} \quad \text{mit} \quad p = \frac{e^2 - a^2}{a} \quad (2.22)$$

### Parabel



Der Abstand vom Fokus  $F$  zum Punkt  $P$  auf der Parabel ist gleich dem Abstand von  $P$  zur Leitlinie  $L$ : Parabel =  $\{P|\overline{FP} = \overline{PL}\}$   
Wegen  $FP = r$  und  $PL = p - r \cos \phi$  gilt

$$r = p - r \cos \phi$$

Auflösen liefert nun

$$r = \frac{p}{1 + \cos \phi}$$

### Berechnung der Planetenbahnen

Planetenbewegungen werden in sehr guter Näherung durch das Potential

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{\kappa}{r}$$

beschrieben. Hierbei ist  $M$  die Sonnenmasse,  $m$  die Planetenmasse und  $G$  die Gravitationskonstante.

Wir legen den Koordinatenursprung in den Sonnenmittelpunkt. Die kleine Abweichung vom Massenmittelpunkt ist vernachlässigbar (man beachte:  $M \approx 330000m_{\text{Erde!}}$ ). Später werden wir sehen, daß diese Näherung exakt stimmt, wenn man nur den gemeinsamen Schwerpunkt als Koordinatenursprung wählt.

Wir können nun das Potential direkt in (2.19) einsetzen.

Aus

$$\phi - \phi_0 = \frac{L_0}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - \frac{L_0^2}{2m r'^2} + \frac{\kappa}{r'}}$$

folgt mir der Substitution  $u = \frac{1}{r}$ ,  $r = \frac{1}{u}$ ,  $dr = -\frac{1}{u^2} du$

$$\phi - \phi_0 = - \int \frac{1/r}{\sqrt{\frac{2mE}{L_0^2} + \frac{2m}{L_0^2} \kappa u - u^2}} du = \arccos \frac{\frac{1}{r} - \frac{m\kappa}{L_0^2}}{\sqrt{\frac{m^2 \kappa^2}{L_0^4} + \frac{2mE}{L_0^2}}}$$

Hierbei wurde die Formel  $\int \frac{dx}{\sqrt{c+2bx-x^2}} = -\arccos \frac{x-b}{\sqrt{b^2+c}}$  verwendet, die für  $b^2 + c > 0$  gültig ist. Diese Nebenbedingung ist wegen  $E \geq V_{eff} \geq -\frac{m\kappa^2}{2L_0^2}$  erfüllt ( $-\frac{m\kappa^2}{2L_0^2}$  ist das Minimum von  $V_{eff}$ ).

Im Integral fehlt die untere Grenze  $\frac{1}{r_0}$ . Hierbei handelt es sich jedoch lediglich um einen konstanten Summanden, den man in  $\phi_0$  hineinziehen kann.

Auflösen ergibt nun

$$\cos(\phi - \phi_0) = \frac{\frac{L_0^2}{m\kappa} \frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2L_0^2 E}{m\kappa^2}}} = \frac{p}{r} - 1 \quad \varepsilon$$

Wobei

$$p = \frac{L_0^2}{m\kappa} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L_0^2 E}{m\kappa^2}} \quad (2.23)$$

gesetzt wurde. Löst man nun nach  $r$  auf, erhält man schließlich

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\phi - \phi_0)}$$

In Abhängigkeit von  $\varepsilon$  ergeben sich also die verschiedenen Kegelschnitte. Die jeweilige Energie folgt aus (2.23).

- für  $\varepsilon > 1$ , d.h.  $E > 0$ , eine Hyperbel
- für  $\varepsilon = 1$ , d.h.  $E = 0$ , eine Parabel
- für  $\varepsilon < 1$ , d.h.  $E < 0$ , eine Ellipse

Damit ist das erste Kepler-Gesetz hergeleitet: Die Planeten beschreiben Ellipsenbahnen, wobei die Sonne in einem Brennpunkt der Ellipse steht.

### Zusammenhang zwischen $E$ , $a$ und der Bahnform

Für  $\varepsilon < 1$  ist

$$2a = r_{min} + r_{max} = \frac{p}{1 - \varepsilon} + \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2}$$

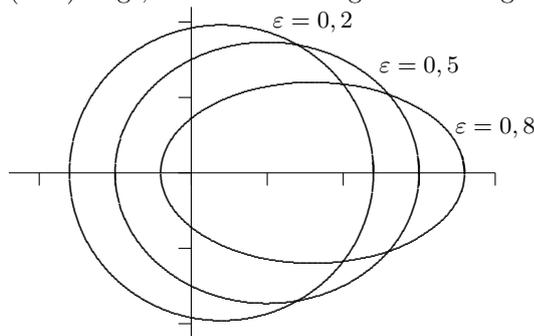
Setzt man  $p$  und  $\varepsilon$  aus (2.23) ein, erhält man

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{L_0^2}{m\kappa} \left( -\frac{m\kappa^2}{2L_0^2 E} \right) = \frac{\kappa}{2|E|} \quad (2.24)$$

Die kleine Halbachse  $b$  kann man mit (2.20) berechnen:

$$b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) = \frac{\kappa^2}{4E^2} \left( -\frac{2L_0^2 E}{m\kappa^2} \right) = \frac{L_0^2}{2|E|m} = ap \quad (2.25)$$

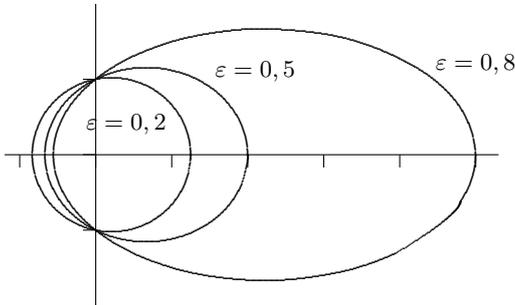
(2.24) zeigt, daß die Bahnen gleicher Energie die gleiche große Halbachse haben:



Aus (2.25) folgt mit (2.24):

$$p = \frac{L_0^2}{2|E|m} \frac{2|E|}{\kappa} = \frac{\kappa L_0^2}{m}$$

Die Bahnen mit gleichem Drehimpuls haben also gleiches  $p$ :



Hier sind die Exzentrizitäten einiger

| Planeten: |               |
|-----------|---------------|
| Planet    | $\varepsilon$ |
| Merkur    | 0,206         |
| Erde      | 0,017         |
| Mars      | 0,093         |

### Ableitung des dritten Keplerschen Gesetzes:

Die Fläche einer Ellipse ist  $A = \pi ab$ . Andererseits folgt aus  $dA = \frac{L_0}{2m} dt$  durch Integration über die Umlaufperiode  $T$ :  $A = \frac{L_0}{2m} T$ . Damit gilt

$$T = \frac{2\pi m}{L_0} ab = \frac{2\pi m}{L_0} a \sqrt{pa} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\kappa}} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{1}{GM}}$$

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Ellipsenbahnen.

Weiterhin ist  $T$  für kleine Planetenmassen unabhängig von der Planetenmasse.

(Keplers zweites Gesetz, den Flächensatz, hatten wir ja schon in 2.5.2 abgeleitet.)

# 3 Lagrangesche Mechanik

## Inhalt

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>3.1 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten . . . . .</b>               | <b>23</b> |
| 3.1.1 Arten von Zwangsbedingungen . . . . .   | 24        |
| 3.1.2 Generalisierte Koordinaten $(q_1, \dots, q_f)$ . . . . .                      | 24        |
| <b>3.2 Eingeschränkte Bewegung eines Massenpunktes, Lagrange-Gleichungen</b>        |           |
| <b>1.Art . . . . .</b>  | <b>25</b> |
| 3.2.1 Zwangskräfte . . . . .  | 25        |
| 3.2.2 Bewegung auf ruhender Fläche . . . . .  | 26        |
| <b>3.3 Gleichgewicht des Massenpunktes, Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .</b> | <b>27</b> |
| 3.3.1 Andere Form der Gleichgewichtsbedingung . . . . .                             | 28        |
| 3.3.2 Gleichgewicht des unfreien Massenpunktes . . . . .                            | 28        |
| <b>3.4 d'Alembertsches Prinzip und Lagrange-Gleichungen 2.Art . . . . .</b>         | <b>29</b> |
| 3.4.1 Einführung generalisierter Koordinaten . . . . .                              | 29        |
| 3.4.2 Kochrezept... . . . .   | 31        |
| <b>3.5 Einbeziehung anholonomer Nebenbedingungen . . . . .</b>                      | <b>34</b> |

---

## 3.1 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

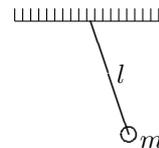
Bisher haben wir die Bewegungsgleichungen aus den Kräften mit den Newtonschen Gesetzen abgeleitet. Probleme mit sogenannten Zwangs- oder Nebenbedingungen lassen sich aber damit nur umständlich lösen. Für eingeschränkte Bewegungen von Massenpunkten hat man daher einen eigenen Formalismus entwickelt - die Lagrangeschen Gleichungen.

Zuerst einige Beispiele für Zwangsbedingungen:

Beim Pendel muß sich die Pendelmasse stets so bewegen, daß

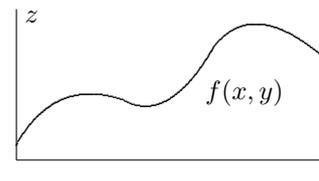
$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 = l^2$$

gilt.



Bewegt sich der Massenpunkt auf oder über der Oberfläche eines „Hügels“, dessen Höhe durch die Gleichung  $z = f(x, y)$  gegeben ist, so gilt die Zwangsbedingung

$$z \geq f(x, y)$$



Und beim starren Körper müssen schließlich die Abstände zwischen je zwei Punkten konstant sein:

$$|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}| = r^{ij} = const.$$

### 3.1.1 Arten von Zwangsbedingungen

Am wichtigsten sind die **holonomen Zwangsbedingungen**: Lassen sich die Zwangsbedingungen durch Gleichungen der Form

$$f_i(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}, t) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, M \quad (3.1)$$

ausdrücken, so spricht man von holonomen Zwangsbedingungen. Dies ist z.B. für den starren Körper oder für das Pendel erfüllt. Dort ist  $M = 1$  und die eine Funktion  $f$  lautet  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 - l^2$ . Sind diese  $M$  holonomen Nebenbedingungen voneinander unabhängig, reduzieren sie die Zahl der Freiheitsgrade des Systems auf  $3N - k$ .

Hängen die  $f_i$  nicht von der Zeit  $t$  ab, so spricht man von *skleronomen* Bedingungen, hängen sie explizit von der Zeit ab von *rheonomen*.

Lassen sich die Zwangsbedingungen nicht in die Form von Gleichung (3.1) pressen, so spricht man von *nichtholonomen* oder *anholonomen* Zwangsbedingungen. Ein Beispiel wäre ein Schlittschuh, der stets nur in Richtung der Kufe gleiten kann. Hier sind nicht die Orte der Massenteilchen Bedingungen unterworfen, sondern die Geschwindigkeit. Es gelten dann (für z.B. 1 Teilchen) Bedingungen der Art

$$\sum_{i=1}^3 A_i(\mathbf{r}, t) dx_i + A_4(\mathbf{r}, t) dt = 0.$$

Solche differentiellen Nebenbedingungen schränken, im Gegensatz zu holonomen Zwangsbedingungen, die Zahl der Freiheitsgrade nicht ein.

### 3.1.2 Generalisierte Koordinaten $(q_1, \dots, q_f)$

$f$  sei die Anzahl der Freiheitsgrade. Zahlen  $(q_1, \dots, q_f)$  heißen generalisierte Koordinaten, wenn die Lage aller Punkte des Systems durch diese  $f$  Zahlen gegeben ist, wenn also diese Lagen  $\mathbf{x}^{(i)}$  Funktionen der  $q_1, \dots, q_f$  sind:

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i)}(q_1, \dots, q_f, t) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Die  $q$ 's müssen so gewählt werden, daß

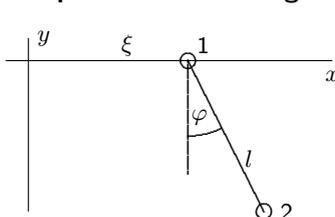
1.  $q_1, \dots, q_f$  unabhängig voneinander variierbar sind und
2. die  $\mathbf{x}^{(i)}$  die Zwangsbedingungen erfüllen.

#### Beispiel 1: Bewegung auf Kugeloberfläche

Bei Verwendung von Polarkoordinaten entspricht die Bewegung auf einer Kugeloberfläche  $|\mathbf{r}| = \text{const.}$  einem konstanten Radius:  $r = r_0$ . Als generalisierte Koordinaten bleiben dann sinnvollerweise noch die beiden Winkel übrig:

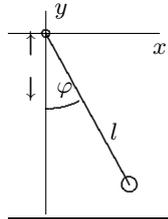
$$\begin{aligned} r &= r_0 = \text{const.} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \sin \vartheta \cos \varphi \\ r_0 \sin \vartheta \sin \varphi \\ r_0 \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

#### Beispiel 2: Pendel mit gleitender Aufhängung



Als verallgemeinerte Koordinaten verwenden wir den Winkel  $\varphi$  und den Abstand  $\xi$  des Punktes 1 von der  $y$ -Achse. Wir haben wieder zwei Freiheitsgrade:  $f = 2$ . Die Koordinaten der Punkte lassen sich schreiben als

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= (\xi, 0) \\ \mathbf{x}^{(2)} &= (\xi + l \sin \varphi, -l \cos \varphi) \end{aligned}$$

**Beispiel 3: Pendel mit geführter Aufhängung**

Der Aufhängepunkt unseres Pendels bewege sich gemäß  $y_A = a \cos \omega t$  auf und ab. Wir benötigen lediglich den Winkel  $\varphi$ , um das System zu beschreiben:  $f = 1$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\varphi, t) = (l \sin \varphi, a \cos \omega t - l \cos \varphi)$$

## 3.2 Eingeschränkte Bewegung eines Massenpunktes, Lagrange-Gleichungen 1.Art

Nun werden wir Bewegungen eines Massenpunktes untersuchen, die dadurch eingeschränkt sind, daß sie entlang einer Fläche oder einer Kurve stattfinden.

### 3.2.1 Zwangskräfte

Wir haben Zwangsbedingungen, und zwar nur eine, wenn die Bewegung auf einer Fläche stattfindet und zwei, wenn sie längs einer Kurve stattfindet:

$$f_i(\mathbf{r}, t) = 0, \quad i = 1 \text{ oder } i = 1, 2$$

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} + \mathbf{K}' \quad (3.2)$$

$\mathbf{K}$  ist die eingeprägte, von außen wirkende Kraft,  $\mathbf{K}'$  ist die Zwangskraft, die das Verlassen der Kurve/Fläche verhindert.

Bestimmung von  $\mathbf{K}'$ :

$\mathbf{K}'$  soll das Verlassen der Fläche/Kurve verhindern, aber die Bewegung nicht beeinflussen. Also muß  $\mathbf{K}'$  senkrecht zur Fläche/Kurve stehen.  $\mathbf{K}'$  muß also parallel zum Gradienten der Bestimmungsgleichung sein. Für die Fläche mit  $f(\mathbf{r}, t) = 0$  erhalten wir

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} + \lambda \nabla f.} \quad (3.3)$$

Das sind (zusammen mit  $f(\mathbf{r}, t) = 0$ ) vier Gleichungen für die vier unbekanntes  $\mathbf{r}$  und  $\lambda$ . Für die Kurve mit  $f_1(\mathbf{r}, t) = f_2(\mathbf{r}, t) = 0$  erhalten wir:

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} + \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2.} \quad (3.4)$$

Also fünf Gleichungen für fünf Unbekannte.

Die letzten beiden Gleichungen heißen *Lagrange Bewegungsgleichungen 1. Art*.  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$  sind die *Lagrangeschen Multiplikatoren*.

Für  $N$  Massenpunkte mit  $r = N - f$  Zwangsbedingungen ergibt sich analog

$$m_i \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}_i + \sum_{j=1}^r \lambda_j \nabla_i f_j \quad i = 1, \dots, N \quad (3.5)$$

Dies sind die *Lagrange-Gleichungen 1. Art* für  $N$  Massenpunkte. Hierbei können die  $f_j$  von allen Punkten abhängen

$$f_i = f_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$$

und  $\nabla_i$  ist der Gradient bezüglich den Koordinaten des  $i$ -ten Punktes:

$$\nabla_i = \left( \frac{\partial}{\partial x_1^{(i)}}, \frac{\partial}{\partial x_2^{(i)}}, \frac{\partial}{\partial x_3^{(i)}} \right)$$

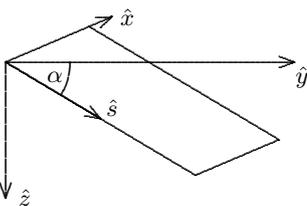
### 3.2.2 Bewegung auf ruhender Fläche

Die Zwangskraft  $\lambda \nabla f$  kann man ausrechnen. Wir betrachten hierzu die Bewegung auf der Fläche  $f(\mathbf{r}) = 0$ . Es gilt längs der Bahn  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  unseres Massenpunktes:

$$\begin{aligned} 0 = f(\mathbf{r}(t)) &\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla f \\ 0 &= \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla f) = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \nabla f + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla f) \\ &\Rightarrow 0 = \frac{1}{m} (\mathbf{K} + \lambda \nabla f) \cdot \nabla f + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla f) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann nun nach  $\lambda$  aufgelöst werden. Wir erhalten dann  $\lambda$  in Abhängigkeit von  $\mathbf{r}$  und  $\dot{\mathbf{r}}$ :  $\lambda = \lambda(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ . Damit ist dann auch die Zwangskraft  $\mathbf{K}'$  bekannt und wir haben die ganze rechte Seite der Gleichung  $m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} + \mathbf{K}'$ . Wir sind also bei den Newton'schen Bewegungsgleichungen ohne Zwangsbedingungen angekommen.

#### Beispiel 4: Massenpunkt auf schiefer Ebene



Für Punkte auf der Ebene gilt  $\tan \alpha = \frac{z}{y}$ . Daraus gewinnt man die Gleichung

$$f(x, y, z) = z - y \tan \alpha = 0 \quad (3.6)$$

$$\nabla f = (0, -\tan \alpha, 1)$$

Wir erhalten also die Bewegungsgleichungen

$$m \ddot{\mathbf{r}} = mg \hat{z} + \lambda \nabla f \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} m \ddot{x} &= 0 \\ m \ddot{y} &= -\lambda \tan \alpha \\ m \ddot{z} &= mg + \lambda \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nun müssen wir  $\lambda$  bestimmen. Leiten wir (3.6) zweimal nach  $t$  ab, erhalten wir

$$0 = \ddot{z} - \ddot{y} \tan \alpha.$$

Hier können wir jetzt die Bewegungsgleichungen (3.7) einsetzen:

$$0 = g + \frac{\lambda}{m} + \frac{\lambda}{m} \tan^2 \alpha = g + \frac{\lambda}{m \cos^2 \alpha} \quad (3.8)$$

$$\Rightarrow \lambda = -mg \cos^2 \alpha \quad (3.9)$$

$\lambda$  hängt hier zum Glück nicht von  $x, z$  und  $z$  ab; das vereinfacht die weitere Rechnung. Wir können jetzt die Bewegungsgleichungen lösen:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 & \Rightarrow & x = x_0 + v_0 t \\ m\ddot{y} &= mg \sin \alpha \cos \alpha & \Rightarrow & y = \frac{g}{2} t^2 \sin \alpha \cos \alpha + u_0 t + y_0 \\ m\ddot{z} &= mg(1 - \cos^2 \alpha) = mg \sin^2 \alpha & \Rightarrow & z = \frac{g}{2} t^2 \sin^2 \alpha + (u_0 t + y_0) \tan \alpha \end{aligned}$$

$x_0, y_0, v_0, u_0$  sind die Integrationskonstanten. Die Bewegung in  $z$ -Richtung ist dann nicht mehr beliebig, weil ja die Zwangsbedingung  $f(y, z) = 0$  erfüllt sein muß. Die  $x$ -Koordinate kommt nur in den  $x$ -Gleichungen vor; die  $x$ -Bewegung ist also unabhängig von den anderen beiden, wir werden sie nicht mehr berücksichtigen.

Wie weit ist unser Punkt zur Zeit  $t$  die schiefe Ebene hinuntergerutscht? Gesucht ist die Bewegung in Richtung  $\hat{s}$ . Wegen  $s = \frac{y}{\cos \alpha}$  ist dies:

$$s = \frac{g}{2} t^2 \sin \alpha + w_0 t + s_0, \quad \text{wobei } w_0 = \frac{u_0}{\cos \alpha}$$

Dies ist eine Bewegung mit um  $\sin \alpha$  reduzierter Schwerkraft.

Wie groß ist die Zwangskraft?

$$\begin{aligned} \mathbf{K}' &= \lambda \nabla f = -mg \cos^2 \alpha (0, -\tan \alpha, 1) = (0, mg \sin \alpha \cos \alpha, -mg \cos^2 \alpha) \\ |\mathbf{K}'| &= mg \cos \alpha \\ \mathbf{K}' \cdot \hat{s} &= \mathbf{K}' (\hat{y} \cos \alpha + \hat{z} \sin \alpha) = mg \cos^2 \alpha \sin \alpha - mg \cos^2 \alpha \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist wichtig.  $\hat{s}$  ist der Einheitsvektor in Richtung der Bewegung und die Zwangskraft steht senkrecht darauf. Die Zwangskraft leistet also keine Arbeit:  $dW = \mathbf{K}' d\mathbf{r} = \mathbf{K}' (\hat{x} dx + \hat{s} ds) = 0$ .

Das letzte Ergebnis des Beispiels gilt auch allgemein:

Bei stationärer Fläche/Kurve leisten die Zwangskräfte keine Arbeit:

$$dW = \mathbf{K}' d\mathbf{r} = 0$$

Da nur die eingeprägte Kraft zur Arbeit beiträgt bleibt der Energiesatz für Bewegungen auf ruhenden Flächen/Kurven gültig, wenn die eingeprägte Kraft konservativ ist.

### 3.3 Gleichgewicht des Massenpunktes, Prinzip der virtuellen Arbeit

Wir untersuchen das Gleichgewicht des Massenpunktes, d.h.  $\ddot{\mathbf{r}} = 0$ . Dies ist ein Zustand der Ruhe (oder der geradlinigen, gleichförmigen Bewegung). Es muß gelten:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = 0, \quad \text{also } \mathbf{K} + \mathbf{K}' = 0$$

Speziell gilt für den an eine Fläche gebundenen Massenpunkt, der ruht:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} + \lambda \nabla f &= 0 \\ f(\mathbf{r}, t) &= 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

An der ersten Gleichung sieht man, daß  $veK$  muß senkrecht zur Oberfläche gerichtet sein muß.

#### Beispiel 5: Massenpunkt auf Kugeloberfläche

Wir betrachten die Bewegung im Schwerfeld, also ist die Kraft  $\mathbf{K} = (0, 0, -mg)$ . Unsere Zwangsbedingung lautet  $|\mathbf{r}|^2 = a^2$ , also

$$f(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2 - a^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\nabla f = 2\mathbf{r}$$

Aus (3.10) folgt dann

$$\left. \begin{array}{l} 2\lambda x = 0 \\ 2\lambda y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow z = \pm a$$

$$-mg + 2\lambda z = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{mg}{2a}$$

Der Massenpunkt bleibt also nur ganz oben oder ganz unten in Ruhe.

### 3.3.1 Andere Form der Gleichgewichtsbedingung

Im Gleichgewicht gilt für den freien Massenpunkt  $\mathbf{K} = 0$ . Das bedeutet, daß für eine (gedachte) infinitesimal kleine Verrückung  $\delta\mathbf{r}$  die dadurch geleistete Arbeit  $\delta W = \mathbf{K}\delta\mathbf{r}$  verschwinden muß:

$$\mathbf{K}\delta\mathbf{r} = 0$$

Diese Gleichung muß für alle instantanen Verrückungen  $\delta\mathbf{r}$  erfüllt sein. Man spricht auch von *virtuellen* Verrückungen.

Ein freier Massenpunkt ist genau dann im Gleichgewicht, wenn die bei virtuellen Verrückungen geleistete Arbeit Null ist.

### 3.3.2 Gleichgewicht des unfreien Massenpunktes

Man kann einen unfreien Massenpunkt ansehen, als einen freien Massenpunkt, der sich unter der äußeren *und* unter der Zwangskraft bewegt. Ergo muß für beliebige, mit den Zwangsbedingungen vereinbare Verrückungen  $\delta\mathbf{r}$  gelten:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}')\delta\mathbf{r} = 0$$

Da  $\mathbf{K}'$  senkrecht auf die Fläche steht, auf der sich der Massenpunkt bewegt,  $\delta\mathbf{r}$  aber in dieser Fläche liegt, gilt  $\mathbf{K}'\delta\mathbf{r} = 0$ . Es muß also

$$\mathbf{K}\delta\mathbf{r} = 0 \tag{3.11}$$

erfüllt sein.

Ein an eine Fläche/Kurve gebundener Massenpunkt ist genau dann im Gleichgewicht, wenn die Arbeit der eingepprägten Kräfte bei allen *möglichen* virtuellen Verrückungen verschwindet.

Dieses Prinzip der virtuellen Arbeit gewinnt seine volle Nützlichkeit erst bei Massenpunktsystemen. Dann lautet die Gleichgewichts-Bedingung

$$\sum_i \mathbf{K}^{(i)}\delta\mathbf{r}^i = 0 \tag{3.12}$$

Bei konservativen Kräften ist  $\mathbf{K} = -\nabla V$  und wir erhalten

$$0 = \mathbf{K}\delta\mathbf{r} = -\nabla V\delta\mathbf{r} = -\delta V.$$

Denn  $\nabla V\delta\mathbf{r}$  ist gerade die Änderung der potentiellen Energie bei der Bewegung um  $\delta\mathbf{r}$ . Also:

Im Gleichgewicht besitzt die potentielle Energie ein Extremum.

### 3.4 d'Alembertsches Prinzip und Lagrange-Gleichungen 2.Art

Wie stellen die Newtonschen Bewegungsgleichungen (3.2) für die eingeschränkte Bewegung um:

$$m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{K} = \mathbf{K}'$$

Die linke Seite bezeichnet die verlorene Kraft, also derjenige Teil der äußeren Kraft, der keine Beschleunigung leistet und von der Zwangskraft im Gleichgewicht gehalten wird. Da die Zwangskraft  $\mathbf{K}'$  senkrecht auf die möglichen infinitesimalen Bewegungen  $\delta\mathbf{r}$  steht, verschwindet das Skalarprodukt:

$$(m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{K}) \delta\mathbf{r} = 0 \quad \text{d'Alembertsches Prinzip} \quad (3.13)$$

Der Massenpunkt bewegt sich so, daß die virtuelle Arbeit der verlorenen Kraft zu jeder Zeit verschwindet.

Für mehrere Massenpunkte wird die Gleichung zu

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{K}_i) \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad (3.14)$$

#### 3.4.1 Einführung generalisierter Koordinaten

Allerdings sind die virtuellen Verrückungen i.a. nicht unabhängig voneinander. Sie müssen ja schließlich den Zwangsbedingungen genügen<sup>1</sup>. Deshalb führt man generalisierte Koordinaten  $q_i$  ein. Die Zwangsbedingungen sind dann automatisch durch eben diese generalisierten Koordinaten erfüllt, wir können die  $q_i$ 's also frei variieren. Unser nächstes Ziel ist es, Gleichung (3.13) in die generalisierten Koordinaten zu übertragen. Dazu werden wir zuerst  $\sum_i \mathbf{K}_i \delta\mathbf{r}_i$  und dann  $\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta\mathbf{r}_i$  berechnen.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s, t) \\ \dot{\mathbf{r}}_i &= \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \dot{\mathbf{r}}_i(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Bei der Ableitung wurde die Kettenregel verwendet. Aus (3.15) folgt insbesondere

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (3.16)$$

Für die virtuellen Verrückungen gilt ebenfalls nach der Kettenregel

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Die Arbeit der eingepägten Kräfte wird zu

$$\delta W_K = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s \underbrace{\left( \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right)}_{=Q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j \quad (3.17)$$

Die  $Q_j$  sind die Komponenten der *generalisierten Kraft*. Da die  $q_j$  nicht notwendigerweise Längen sind (wir hatten z.B. auch schon oft Winkel), haben die  $Q_j$  nicht unbedingt die Dimension einer Kraft, aber  $q_j Q_j$  hat immer die Dimension einer Energie.

<sup>1</sup>Es gilt z.B. für die Bewegung auf der Fläche aus Beispiel 4:  $\delta z = \tan \alpha \delta y$ .

Falls ein Potential  $V = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  existiert, gilt  $\mathbf{K}_i = -\nabla_i V$  und die  $Q_j$ 's werden zu

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

(Hier wurde die Kettenregel „rückwärts“ verwendet.) Jetzt brauchen wir noch eine kurze Nebenrechnung in der die Vertauschbarkeit von zweiten partiellen Ableitungen verwenden:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^s \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{l=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \quad (3.18)$$

Jetzt kommt die Königsrechnung. Wir können nämlich jetzt  $\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i$  in generalisierten Koordinaten ausdrücken. Die beigefügten Kommentare beziehen sich auf die jeweils letzte Umformung vor dem Kommentar. Viel Spaß!

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j && \text{Produktregel ‚rückwärts‘} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right\} \delta q_j && \text{Gleichungen (3.16) und} \\ & && \text{(3.18) eingesetzt} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s \frac{m_i}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 - \frac{\partial}{\partial q_j} |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 \right\} \delta q_j && \frac{\partial \mathbf{a}^2}{\partial x} = 2\mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \\ &= \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j && T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Wenn wir (3.17) und (3.19) zusammensetzen, erhalten wir die neue Form des d'Alembertschen Prinzips:

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0 \quad (3.20)$$

Falls holonome Zwangsbedingungen vorliegen (was fast immer der Fall ist) kann man die  $\delta q_j$  unabhängig voneinander variieren. Dann läßt sich Gleichung (3.20) nur dann erfüllen, wenn die geschweifte Klammer für jedes einzelne  $j$  gleich Null ist:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Falls ein Potential existiert, das Kraftfeld also konservativ ist (was auch fast immer der Fall ist :), gilt  $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ . Wenn wir weiterhin noch die Null  $0 = \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}$  (das Potential hängt nämlich überhaupt nicht von den Geschwindigkeiten ab) addieren, wird aus (3.20)

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = 0$$

$T - V$  werden wir die Lagrange-Funktion  $L$  nennen. Jetzt können wir die letzten beiden „falls“ zusammenfassen:

Für ein konservatives Systems mit holonomen Zwangsbedingungen gelten die *Lagrange-Gleichungen 2 .Art*:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \quad \text{für } j = 1, \dots, s \quad (3.21)$$

wobei  $L = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) - V(q_1, \dots, q_s)$ .

(3.21) sind  $s$  Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wir benötigen also  $2s$  Anfangsbedingungen. Die Zwangsbedingungen treten nicht mehr auf.

Statt der Newtonschen Mechanik mit den Vektoren Kraft und Impuls haben wir es in der Lagrange-Mechanik mit den Skalaren Energie und Arbeit zu tun<sup>2</sup>.

### 3.4.2 Kochrezept...

...für Probleme mit konservativen Kraftfeldern mit holonomen Zwangsbedingungen:

- Bestimme die Zahl  $s$  der Freiheitsgrade und wähle entsprechende generalisierte Koordinaten  $q_1, \dots, q_s$ .
- Bestimme  $T, V$  und  $L = T - V$  als Funktionen der  $q_i, \dot{q}_i$ .
- Stelle die Lagrange-Gleichungen  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$  auf und löse sie.

#### Beispiel 5: Kugelpendel

Wir wählen die beiden Winkel  $\vartheta$  und  $\varphi$  der Polarkoordinaten als generalisierte Koordinaten. Wenn wir  $\vartheta$  und  $\varphi$  um sehr kleine Beträge  $d\vartheta$  und  $d\varphi$  ändern, bewegt sich der Massenpunkt um  $Rd\vartheta$  in Richtung Süden und um  $R\sin\vartheta d\varphi$  nach Osten. Das sind gerade die Richtungen von  $\hat{e}_\vartheta$  und  $\hat{e}_\varphi$ , also gilt in Polarkoordinaten

$$d\mathbf{r} = R d\vartheta \hat{e}_\vartheta + R \sin \vartheta d\varphi \hat{e}_\varphi$$

Die Einheitsvektoren sind orthogonal, also gilt für die Geschwindigkeit der Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 &= R^2 \left( \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right) \\ \Rightarrow T &= \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 = \frac{mR^2}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) \end{aligned}$$

weiterhin ist

$$V = mgR \cos \vartheta$$

und damit

$$L = T - V = \frac{mR^2}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - mgR \cos \vartheta$$

Die Lagrange-Gleichungen lauten:

<sup>2</sup>Allerdings kann man den Lagrange-Formalismus nicht auf Reibungskräfte anwenden.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \frac{d}{dt} (mR^2 \dot{\vartheta}) - (mR^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 + mgR \sin \vartheta) \\
&= mR^2 (\ddot{\vartheta} - \cos \vartheta \sin \vartheta \dot{\varphi}^2) - mgR \sin \vartheta \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt} (mR^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}) - 0 = 0
\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt sofort, daß die letzte runde Klammer konstant ist. Dies ist jedoch gerade der Drehimpuls  $L_0$ :

$$L_0 = mR^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Diese Konstante kommt daher, daß in der Lagrange-Gleichung der zweite Summand  $\frac{\partial L}{\partial \varphi}$  wegfällt. Dies gilt auch allgemein:

Gilt für eine Koordinate  $q_j$   $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ , so ist der zugehörige *verallgemeinerte Impuls* konstant:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j = \text{const.}$$

$q_j$  heißt dann *zyklische Variable*.

Wir können die Drehimpulserhaltung nach  $\dot{\varphi}$  auflösen:

$$\dot{\varphi} = \frac{L_0}{mR^2 \sin^2 \vartheta}$$

Jetzt könnten wir dieses  $\dot{\varphi}$  in die erste Lagrange-Gleichung einsetzen und versuchen, die Gleichung, die dann nur noch von  $\vartheta$  abhängt, zu lösen. Das ist jedoch schwierig. Wir setzen  $\dot{\varphi}$  stattdessen in den Energiesatz ein:

$$\text{const.} = E = T + V = \frac{mR^2}{2} \left( \dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \frac{L_0^2}{m^2 R^4 \sin^4 \vartheta} \right) + mgR \cos \vartheta$$

Die Gleichung ist immer noch unhandlich. Wir ersetzen nun  $\vartheta$  durch  $z$ . Mittels

$$\cos \vartheta = \frac{z}{R}, \quad \sin^2 \vartheta = 1 - \frac{z^2}{R^2} = \frac{R^2 - z^2}{R^2} \quad - \sin \vartheta \dot{\vartheta} = \frac{\dot{z}}{R}, \quad \dot{\vartheta}^2 = \frac{\dot{z}^2}{R^2 \sin^2 \vartheta} = \frac{\dot{z}^2}{R^2 - z^2}$$

folgt

$$E = \frac{mR^2}{2} \left( \frac{\dot{z}^2}{R^2 - z^2} + \frac{L_0^2}{m^2 R^4} \frac{R^2}{R^2 - z^2} \right) + mgz$$

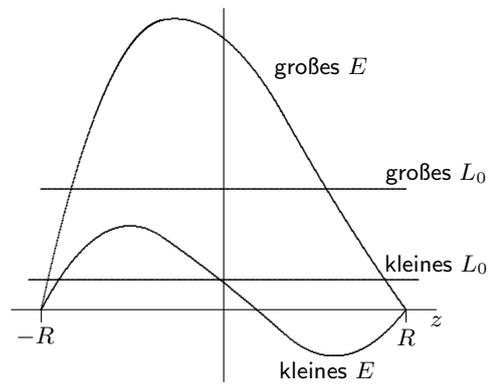
Auflösen und Trennung der Variablen liefert hieraus

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \sqrt{\frac{2}{mR^2} (E - mgz)(R^2 - z^2) - \frac{L_0^2}{m^2 R^2}} =: \sqrt{\Gamma(z)} \\
\Rightarrow t &= \int \frac{dz}{\sqrt{\Gamma(z)}} \quad \text{mit einem kubischen Polynom } \Gamma(z) \\
\Rightarrow z &= z(t)
\end{aligned}$$

Das Problem besteht lediglich darin, daß man das auftretende Integral nicht geschlossen lösen kann. Offenbar kann sich der Punkt nur in solchen Bereichen bewegen, in denen  $\Gamma(z) \geq 0$  ist. Da für  $L_0 \neq 0$   $\Gamma(\pm R) < 0$  ist, kann das Pendel die Pole nicht erreichen, wenn der Drehimpuls ungleich Null ist. Es gilt

$$-R < z_1 \leq z \leq z_2 < R$$

Die erlaubten Bereiche kann man sich veranschaulichen, indem man die Kurve  $\frac{2}{mR^2}(E - mgz)(R^2 - z^2)$  mit der Waagrechten  $\frac{L_0^2}{m^2R^2}$  schneidet. Für kleine  $E$  hat die Kurve zwischen den beiden stets vorhandenen Nullstellen bei  $\pm R$  noch eine dritte dazwischen, für große  $E$  ähnelt sie einer Parabel mit den beiden Nullstellen  $\pm R$ . Erlaubt ist dann jeweils der Bereich mit „Kurve  $<$  Gerade“ (Siehe nebenstehende Abbildung).

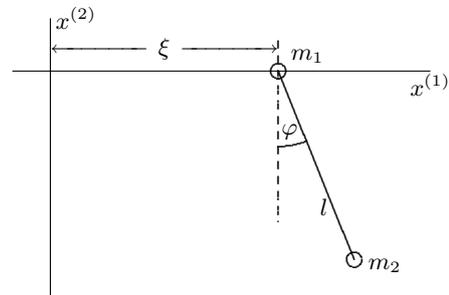


### Beispiel 6: Pendel mit gleitender Aufhängung im Schwerfeld

Wir wählen als generalisierte Koordinaten  $\varphi$  und  $\xi$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= (\xi, 0) \\ \mathbf{x}^{(2)} &= (\xi + l \sin \varphi, -l \cos \varphi) \end{aligned}$$

Jetzt geht's weiter nach Kochrezept:



$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2} \dot{\xi}^2 + \frac{m_2}{2} \left( (\dot{\xi} + l \cos \varphi \dot{\varphi})^2 + (l \sin \varphi \dot{\varphi})^2 \right) \\ &= \frac{m_1}{2} \dot{\xi}^2 + \frac{m_2}{2} \left( \dot{\xi}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l \dot{\varphi} \dot{\xi} \cos \varphi \right) \\ V &= -m_2 g l \cos \varphi \\ L &= T - V \end{aligned}$$

$\xi$  ist wieder eine zyklische Variable, die zugehörige Lagrange-Gleichung lautet

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = \frac{d}{dt} (m_1 \dot{\xi} + m_2 \dot{\xi} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi) \tag{3.22}$$

Für  $\varphi$  ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} (m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l \dot{\xi} \cos \varphi) - (-m_2 l \dot{\varphi} \dot{\xi} \sin \varphi - m_2 g l \sin \varphi) \\ &= m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{\xi} \cos \varphi - m_2 l \dot{\xi} \sin \varphi \dot{\varphi} + m_2 l \dot{\varphi} \dot{\xi} \sin \varphi + m_2 g l \sin \varphi \\ &= m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{\xi} \cos \varphi + m_2 g l \sin \varphi \end{aligned} \tag{3.23}$$

Jetzt linearisieren wir die Gleichung. Dazu nehmen wir an, daß  $\varphi, \dot{\varphi}$  und  $\xi$  klein sind, so daß man Produkte aus diesen Größen, die ja dann noch viel kleiner sind, vernachlässigen kann. Weiterhin gilt für kleine  $\varphi$  auch

$$\sin \varphi \approx \varphi \quad \text{und} \quad \cos \varphi \approx 1$$

In Gleichung (3.22) muß der Ausdruck in der runden Klammer konstant sein. Wir nennen diese Konstante  $(m_1 + m_2)v_0$ :

$$\begin{aligned} \text{const.} &= (m_1 + m_2)\dot{\xi} + m_2 l \dot{\varphi} := (m_1 + m_2)v_0 \\ \Rightarrow \dot{\xi}(t) &= v_0 - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \dot{\varphi}(t) \\ \Rightarrow \xi(t) &= -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \varphi(t) + v_0 t + \xi_0 \end{aligned}$$

und, wenn man ableitet statt integriert:

$$\ddot{\xi}(t) = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \ddot{\varphi}(t)$$

Diese allerletzte Zeile können wir in (3.23) einsetzen, nachdem wir diese Gleichung linearisiert haben:

$$\begin{aligned} 0 &= m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{\xi} + m_2 l g \varphi \\ &= m_2 l^2 \ddot{\varphi} - \frac{m_2 l^2}{m_1 + m_2} \ddot{\varphi} + m_2 l g \varphi \\ \Rightarrow \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi &= 0 \end{aligned}$$

Das ist eine Schwingungsgleichung, also:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + t_0) \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}$$

Damit ergibt sich schließlich

$$\xi(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \varphi_0 \cos(\omega t + t_0) + v_0 t + \xi_0$$

Wir haben vier Integrationskonstanten  $\xi_0, \varphi_0, v_0, t_0$ .

### 3.5 Einbeziehung anholonomer Nebenbedingungen

Dieser Abschnitt stellt nur eine Skizze dar, genauer steht's z.B. in Päsler, Prinzipie der Mechanik, §13.

Wir betrachten ein Problem mit  $h$  holonomen Zwangsbedingungen

$$f_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad n = 1, \dots, h$$

und  $p$  anholonomen Zwangsbedingungen

$$\sum_{m=1}^{3N} A_{im}(x_1, \dots, x_{3N}, t) dx_m + A_{it}(x_1, \dots, x_{3N}, t) dt = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

Wir führen wie gewohnt generalisierte Koordinaten  $q_1, \dots, q_s$  mit  $s = 3N - h$  ein, ohne die anholonomen Bedingungen zu berücksichtigen.

Die oben durchgeführte Ableitung bleibt gültig bis

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0 \quad (3.24)$$

Jetzt sind allerdings die  $\delta q_j$  nicht unabhängig voneinander wählbar, da ja noch die  $p$  anholonome Zwangsbedingungen erfüllt werden müssen. Da die virtuellen Verrückungen instantan ( $dt = 0$ ) erfolgen, müssen die  $\delta q_j$  Gleichungen der Art

$$\sum_{m=1}^s a_{im} \delta q_m = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, p \quad (3.25)$$

genügen. Hierbei ergeben sich die  $a_{im}$  aus den  $A_{im}$ .

Nun werden wieder Lagrange Multiplikatoren verwendet. Aus Gleichung (3.25) folgt natürlich für beliebige  $\lambda_i$

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \sum_{m=1}^s a_{im} \delta q_m = 0$$

Diese produktive Null setzen wir in (3.24) ein:

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{ij} \right\} \delta q_j = 0$$

So, jetzt können wir die ersten  $s - p$   $\delta q_j$  als unabhängig voneinander ansehen, also muß für  $j = 1, \dots, s - p$  die geschweifte Klammer verschwinden. Bei den restlichen  $p$  Gleichungen wählen wir nun die  $\lambda_i$  so, daß die geschweifte Klammer verschwindet. Als Resultat erhalten wir, daß die geschweifte Klammer für alle  $j$  gleich Null sein muß.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{ij} = 0 \quad j = 1, \dots, s \quad (3.26)$$

Zusätzlich sind die Zwangsbedingungen  $\sum_{m=1}^s a_{im} \dot{q}_m + a_{it} = 0$  für  $i = 1, \dots, p$  zu berücksichtigen.

Nochmal: Gleichung (3.26) gilt zwar für alle  $j = 1, \dots, p$ , aber bei verschiedenen  $j$ 's aus verschiedenen Gründen:

- a.)  $j = 1, \dots, s - p$ : Man kann  $s - p$  der  $\delta q_j$  unabhängig voneinander variieren, deshalb müssen sovieler Summanden verschwinden.
- b.)  $j = s - p + 1, \dots, s$ : Wir wählen die  $\lambda_i$  so, daß die restlichen Summanden auch noch verschwinden.

# 4 Mechanik in beschleunigten Bezugssystemen

## Inhalt

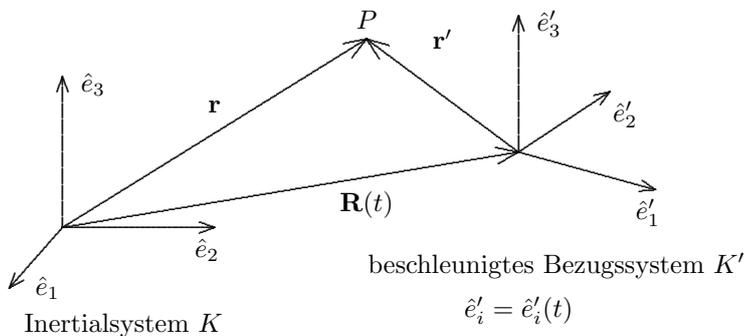
|       |  |    |
|-------|--|----|
| 4.1   | Kinematik . . . . .                                | 36 |
| 4.2   | Dynamik in beschleunigten Bezugssystemen . . . . . | 39 |
| 4.3   | Bewegungen auf der rotierenden Erde . . . . .      | 40 |
| 4.3.1 | Freier Fall . . . . .                              | 40 |
| 4.3.2 | Horizontale Bewegung . . . . .                     | 41 |
| 4.3.3 | Das Foucault'sche Pendel . . . . .                 | 41 |

Unter *beschleunigten Bezugssystemen* versteht man alle Bezugssysteme, die keine Inertialsysteme sind. Also Koordinatensysteme, deren Ursprung keine konstante Geschwindigkeit hat, oder die rotieren (die Drehachse kann sich auch noch ändern) oder für die beides zutrifft.

Wir werden häufig zwei Koordinatensysteme verwenden. Zum einen das beschleunigte, in dem wir Physik betreiben wollen (das heißt, wir wollen die Gleichungen, die dort gelten, herleiten), und zum anderen ein Inertialsystem, in dem wir die physikalischen Gesetze bereits kennen (das sind die Newton'schen Bewegungsgleichungen).

Variablenamen ohne Strich wie  $\hat{e}_1$  oder  $\mathbf{v}$  bezeichnen Größen im Inertialsystem, gestrichene wie  $\hat{e}'_1$  oder  $\mathbf{v}'$  die zugehörigen Werte im bewegten Koordinatensystem.

Wenn  $\mathbf{R}=\mathbf{R}(t)$  der Vektor vom Ursprung des Inertialsystems zum Ursprung des bewegten Koordinatensystems ist, lassen sich alle Größen gemäß folgender Skizze zerlegen:



$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'(t)$$

## 4.1 Kinematik

In diesem Abschnitt wollen wir die Beziehungen zwischen Geschwindigkeiten bzw. Beschleunigungen im Inertialsystem und im beschleunigten Bezugssystem untersuchen.

Wir betrachten zuerst den Ortsvektor zum Punkt  $P$ :

Wie man anhand der Skizze sieht, gilt

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' \tag{4.1}$$

Weiterhin lassen sich  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}'$  zerlegen:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i \equiv x_i \hat{e}_i$$

$$\mathbf{r}' = \sum_{i=1}^3 x'_i \hat{e}'_i \equiv x'_i \hat{e}'_i$$

Hier wurde bereits die Einstein'sche Summenkonvention<sup>1</sup> verwendet:

Über jeden zweimal in ein und demselben Produkt auftretenden lateinischen Index wird von 1 bis 3 summiert.

Bevor wir uns den Geschwindigkeiten widmen können, müssen wir erst untersuchen, wie sich Zeitableitungen der (Orts-)Vektoren verhalten, denn genau die brauchen wir ja schließlich für die Geschwindigkeit. Wir betrachten also einen beliebigen Vektor

$$\mathbf{a} = \sum_i a'_i \hat{e}'_i = a'_i \hat{e}'_i$$

und leiten ihn ab:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d}{dt}(a'_i \hat{e}'_i) = a'_i \frac{d}{dt} \hat{e}'_i + \dot{a}'_i \hat{e}'_i = \dot{a}'_i \hat{e}'_i + a'_i \frac{d}{dt} \hat{e}'_i \quad (4.2)$$

Uns fehlt jetzt die Ableitung der Basisvektoren von  $K'$ . Diese ändern sich (für den Beobachter in  $K$ ) nur dann, wenn  $K'$  rotiert. Wir betrachten also von  $K$  aus eine Rotation von  $K'$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Die Richtung dieses Vektors gibt wie immer die Drehachse an, der Betrag die Winkelgeschwindigkeit. Wenn  $K'$  rotiert, das ist das gleichbedeutend mit der Rotation der Basisvektoren  $\hat{e}'_i$  von  $K'$ . Ein beliebiger Vektor  $\mathbf{x}$ , der mit  $\omega$  rotiert, genügt der Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \omega \times \mathbf{x}. \quad (4.3)$$

Die Basisvektoren sind auch Vektoren, also gilt dieselbe Gleichung auch für sie:

$$\frac{d\hat{e}'_i}{dt} = \omega \times \hat{e}'_i \quad (4.4)$$

Diese Gleichung sagt, wie sich die Basisvektoren von  $K'$  ändern, wenn man sie vom *ruhenden* Koordinatensystem aus betrachtet.

Setzen wir (4.4) in (4.2) ein, erhalten wir

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \dot{a}'_i \hat{e}'_i + a'_i \omega \times \hat{e}'_i = \dot{a}'_i \hat{e}'_i + \omega \times \underbrace{(a'_i \hat{e}'_i)}_{=\mathbf{a}} = \frac{d'\mathbf{a}}{dt} + \omega \times \mathbf{a}$$

$\frac{d\mathbf{a}}{dt}$  steht für die Änderung des Vektors im Inertialsystem,  $\dot{a}'_i \hat{e}'_i = \frac{d'\mathbf{a}}{dt}$  ist die Änderung des Vektors, die man im mitbewegten System  $K'$  mißt. Weil's so schön ist, nochmal und diesmal sogar mit Nummer:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d'\mathbf{a}}{dt} + \omega \times \mathbf{a} \quad (4.5)$$

$\mathbf{a}$  bedeutet hier nicht Beschleunigung, sondern *irgendeinen* Vektor.

<sup>1</sup>Wir verwenden die Summenkonvention häufig auch bei generalisierten Koordinaten. Dann wird über alle Freiheitsgrade, das heißt, von 1 bis  $s$ , summiert. In diesem Skript ist die Verwendung der Summenkonvention willkürlich. Manche Rechnungen werden mit Summenkonvention durchgeführt, in anderen Rechnungen stehen die Summenzeichen. Wenn die Summenkonvention verwendet wird, wird darauf hingewiesen.

Wo ist der Unterschied zwischen (4.3) und (4.5)? Wenn wir den Vektor  $\mathbf{x}$ , der mit  $\omega$  rotiert, von einem Koordinatensystem aus betrachten, das ebenfalls mit  $\omega$  rotiert, dann ist er in diesem Koordinatensystem konstant:  $\frac{d'\mathbf{x}'}{dt} = 0$ . Also erfüllt  $\mathbf{x}$  auch die Gleichung (4.5). Darüberhinaus ist die Gleichung (4.5) allgemeiner, denn sie gilt auch für Vektoren, die sich in  $K'$  ändern.

Man kann (4.5) auch symbolisch schreiben:

$$\frac{d}{dt} - = \frac{d'}{dt} - + \omega \times - \quad (4.6)$$

Diese Schreibweise bedeutet, daß wir eine wahre Gleichung erhalten, wenn wir links und rechts in der Gleichung einen Vektor einsetzen. (Der Vektor muß im beschleunigten System  $K'$  dargestellt sein.)

Wir können nun also die zeitliche Ableitung des Vektors im Inertialsystem nur durch Größen des beschleunigten Systems  $K'$  ausdrücken.

Was gilt speziell für  $\omega$ ? Wendet man (4.5) auf  $\omega$  an, erhält man

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d'\omega}{dt} + \omega \times \omega = \frac{d'\omega}{dt} \equiv \dot{\omega}$$

Die Ableitung von  $\omega$  stimmt also in beiden Koordinatensystemen überein. Deshalb ist die Bezeichnung  $\dot{\omega}$  gerechtfertigt. So, jetzt können wir bei den Geschwindigkeiten weitermachen:

### Zusammenhang zwischen Geschwindigkeiten in $K$ und $K'$

Leiten wir (4.1) ab, erhalten wir die Geschwindigkeit in  $K$ :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$$

Mit (4.5) wird hieraus

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \omega \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}_{tr} + \mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{r}' \quad (4.7)$$

Wir haben also die Geschwindigkeit im Inertialsystem  $K$  durch Größen in  $K'$  ausgedrückt.  $\mathbf{v}_{tr} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$  ist die Translationsgeschwindigkeit und  $\mathbf{v}' = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt}$  die in  $K'$  gemessene Geschwindigkeit.

### Zusammenhang zwischen Beschleunigungen

Diese Gleichheit wird in der letzten Zeile der nächsten Rechnung verwendet. Wir wenden nun (4.5) auf (4.7) an:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= \frac{d\mathbf{v}_{tr}}{dt} + \frac{d'}{dt}(\mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{r}') + \omega \times (\mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{r}') \\ &= \mathbf{a}_{tr} + \underbrace{\frac{d'}{dt}\mathbf{v}'}_{\mathbf{a}'} + \omega \times \underbrace{\frac{d\mathbf{r}'}{dt}}_{\mathbf{v}'} + \frac{d'\omega}{dt} \times \mathbf{r}' + \omega \times \mathbf{v}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}') \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}' + 2\omega \times \mathbf{v}' + \dot{\omega} \times \mathbf{r}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (4.8)$$

Das war's schon. Wir haben die Beschleunigung in  $K$  durch Größen von  $K'$  ausgedrückt.

Eine Anmerkung für Puristen, die nicht mehr auswendig lernen wollen als irgend notwendig: Es genügt, sich die Gleichung (4.6) zu merken. Daraus ergibt sich dann

$$\mathbf{v} = \left( \frac{d'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \cdot \right) \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{a} = \left( \frac{d'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \cdot \right) \left( \frac{d'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \cdot \right) \mathbf{r}'$$

Das Produkt wird 'ganz normal' ausmultipliziert:

$$\mathbf{a} = \left( \frac{d'^2}{dt^2} + \frac{d'}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \cdot) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \cdot) \right) \mathbf{r}'$$

Und das ist -bis auf das unwichtige  $\mathbf{a}_{tr}$  - die Formel von oben.

## 4.2 Dynamik in beschleunigten Bezugssystemen

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen wurden für Inertialsysteme formuliert und lauten dort

$$m\mathbf{a} = \mathbf{K}.$$

Setzen wir für  $\mathbf{a}$  den Ausdruck (4.8) ein, erhalten wir die Bewegungsgleichung in den Variablen von  $K'$ :

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{K}' - m\mathbf{a}_{tr} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' \quad (4.9)$$

Hierbei ist  $\mathbf{K}' = \mathbf{K}$ , der Strich soll lediglich andeuten, daß man die Kraft in den Koordinaten von  $K'$  ausdrücken muß.

Der Beobachter in  $K'$  muß also im allgemeinen vier Zusatzterme einführen, um Dynamik im Sinne der Newtonschen Mechanik betreiben zu können.

Der Term  $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$  heißt *Coriolis-Kraft*,  $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$  ist die *Zentrifugal-Kraft*.

### Spezialfälle

a.) Nicht beschleunigtes Koordinatensystem  $K'$ :

Es sei  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{v}_0(t - t_0) + \mathbf{R}_0$ , wobei  $\mathbf{v}_0, \mathbf{R}_0 = \text{const.}$  Weiterhin sei  $\boldsymbol{\omega} = 0$ . Dann ist auch  $K'$  ein Inertialsystem, wir sollten also das ganz gewöhnliche  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  erhalten. Let's see:

Es ist auch  $\mathbf{a}_{tr} = 0$ , und (4.9) wird zu

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{K}'$$

Wunderbar! Newton ist also wirklich gegen Galilei-Transformationen invariant.

b.) Beschleunigte Translationsbewegung:

Es sei  $\boldsymbol{\omega} = 0$ . Dann folgt

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{K}' - m\mathbf{a}_{tr}$$

Das kennt jeder vom Autofahren. Wenn man auf die Bremse steigt, rucken die Köpfe nach vorn.

Die gleiche Situation liegt in frei fallenden Fahrstühlen vor: Ein Körper ruht im frei fallenden Fahrstuhl. Dort gilt für die Gewichtskraft weiterhin  $\mathbf{K}' = m\mathbf{g}$ . Da der Fahrstuhl fällt, ist außerdem  $\mathbf{a}_{tr} = \mathbf{g}$ . Einsetzen liefert  $\mathbf{a}' = 0$ .

Diese Äquivalenz von Trägheitskraft und Schwerkraft ist der Ausgangspunkt für die Gravitationstheorie.

c.) Rotierendes Bezugssystem:

Es sei  $\mathbf{a}_{tr} = 0$ . Aus (4.9) wird dann

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{K}' + \mathbf{K}_{Coriolis} + \mathbf{K}_{zentrif} + m\mathbf{r}' \times \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (4.10)$$

Der letzte Term fällt bei einer gleichförmigen Rotation ( $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ ) weg. Diese Gleichung werden wir im nächsten Abschnitt untersuchen.

### 4.3 Bewegungen auf der rotierenden Erde

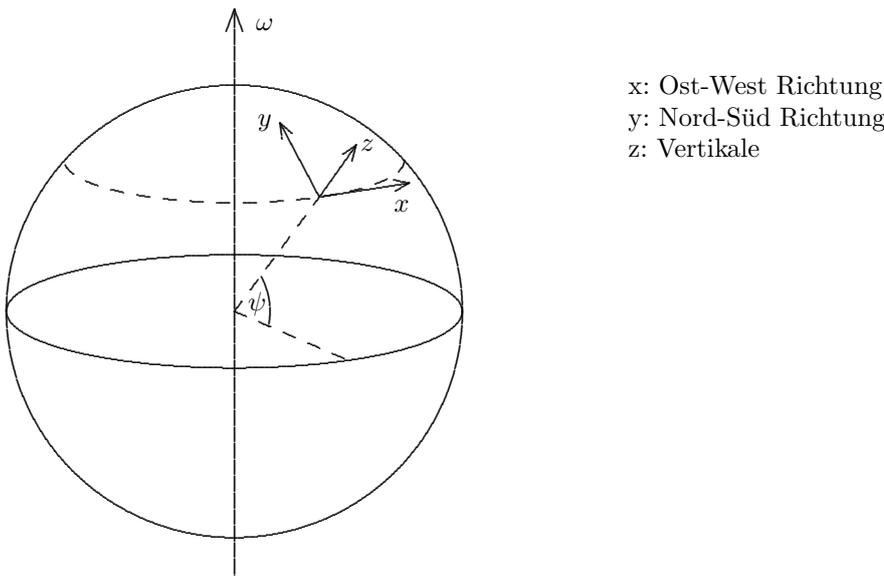
Auf der Erde ist  $\omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}$  und  $\dot{\omega} = 0$ . Wir haben also einen Spezialfall von (4.10) vor uns.

Zuerst verazten wir die Zentrifugalkraft  $m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times \boldsymbol{\omega}$ . Da  $\mathbf{r}' \approx \text{const.}$  ist sie nahezu konstant. Man kann diesen Term in die Erdbeschleunigung miteinbeziehen. Dann zeigt  $\mathbf{g}$  zwar nicht mehr genau in Richtung Erdmittelpunkt, steht aber gerade senkrecht auf der Erdoberfläche. Die Erde ist ja bekanntlich (wegen der Zentrifugalkraft) ein wenig abgeflacht, so das die Erdoberfläche eine Äquipotentialfläche bildet.

Uns bleibt also nur die Corioliskraft. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + 2m(\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (4.11)$$

Wir wählen nun ein Koordinatensystem wie in folgender Skizze:



Mit  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, \omega \cos \psi, \omega \sin \psi)$  und  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$  ergibt sich folgende komponentenweise Darstellung von (4.11):

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega\dot{y} \sin \psi - 2\omega\dot{z} \cos \psi \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x} \sin \psi \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega\dot{x} \cos \psi \end{aligned} \quad (4.12)$$

Diese Gleichungen werden wir nun für einige Spezialfälle lösen.

#### 4.3.1 Freier Fall

Es sei  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$ ,  $x(0) = y(0) = 0$  und  $z(0) = h$ .

Wegen  $\omega \ll 1$  und  $\dot{x} \ll 1$  folgt aus den letzten beiden Zeilen von (4.12) sofort

$$\begin{aligned} \ddot{y} = 0 &\Rightarrow \dot{y} = 0 \Rightarrow y = 0, \\ \ddot{z} = -g &\quad \dot{z} = -gt \quad z = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für  $x$ :

$$\ddot{x} = 2\omega g t \cos \psi \Rightarrow x = \frac{1}{3}\omega g \cos \psi t^3 \approx 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t^3$$

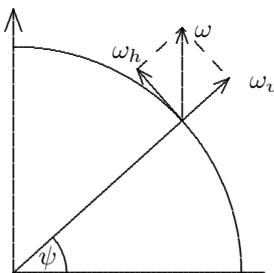
Wir erhalten also eine Ostablenkung. Dies stimmt mit der Drehimpulserhaltung überein: Während des Fallens verkleinert sich der Radius der Kreisbahn unseres Steines. Also muß die Winkelgeschwindigkeit des Steines zunehmen. Diese war zu Beginn so groß wie die der Erde, beim Fallen ist sie also größer als die der Erde.

Für  $h = 125m$  ist  $t = 5s$ , und wir erhalten eine Ostablenkung von etwa  $1,25cm$ . Hieraus schloß Galilei auf die Erddrehung.

### 4.3.2 Horizontale Bewegung

Wir zerlegen die Winkelgeschwindigkeit der Erde in eine Komponente parallel zur Erdoberfläche und eine senkrecht dazu:

$$\omega = \omega_v + \omega_h$$



Damit läßt sich die Corioliskraft wie folgt schreiben:

$$\mathbf{K}_{Co} = 2m(\mathbf{v} \times \omega_v) + 2m(\mathbf{v} \times \omega_h)$$

Der erste Term beschreibt unabhängig von der Richtung unserer horizontalen Bewegung auf der Nordhalbkugel eine Rechtsablenkung (Auf der Südhalbkugel zeigt  $\omega_v$  in Richtung Erdmittelpunkt, wir erhalten eine Linksablenkung). Der zweite Term liefert bei  $\mathbf{v}$ 's mit Ost-West-Komponente eine Kraft in vertikaler Richtung.

### 4.3.3 Das Foucault'sche Pendel

Foucault gelang 1851 durch ein im Pantheon aufgehängtes Pendel der Nachweis der Erdrotation<sup>2</sup>.

Wir wollen nun die Bewegung des Pendels berechnen. Es handelt sich um ein mathematisches Pendel auf der rotierenden Erde.

Für ein Kugelpendel gilt

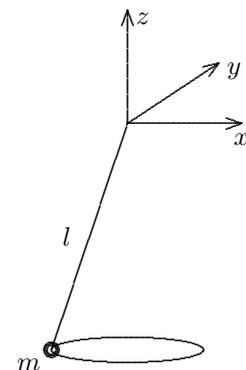
$$f = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

Die Lagrange-Gleichungen erster Art lauten hier

$$\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \lambda \nabla f$$

Setzt man  $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega \cos \psi, \omega \sin \psi) = (0, \omega_h, \omega_v)$  ein, erhält man

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega_v \dot{y} - 2\omega_h \dot{z} + \lambda x \\ \ddot{y} &= -2\omega_v \dot{x} + \lambda y \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega_h \dot{x} + \lambda z \end{aligned}$$



Zur Vereinfachung wollen wir annehmen, daß das Pendel nur wenig ausgelenkt ist. Dann ist  $\frac{x}{l} \ll 1$ ,  $\frac{y}{l} \ll 1$ ,  $\dot{x} \approx 0$ , und der Massenpunkt bewegt sich annähernd auf der Ebene  $z = -l$ , d.h.  $\dot{z} \approx 0$  und  $\ddot{z} \approx 0$ .

<sup>2</sup>Das Pendel dreht sich wirklich, ich hab's gesehen!

Nach Auskunft von Prof. Brand kann dieser Versuch auch im Deutschen Museum in München besichtigt werden

Damit vereinfacht sich die  $z$ -Gleichung zu  $0 = -g - \lambda l$ . Hieraus ergibt sich

$$\lambda = -\frac{g}{l}$$

Setzt man dieses  $\lambda$  ein, erhält man

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\omega_v \dot{y} - \frac{g}{l}x \\ \ddot{y} &= -2\omega_v \dot{x} - \frac{g}{l}y\end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen sind gerade der Real- und der Imaginärteil der folgenden komplexen Differentialgleichung:

$$\ddot{u} = -2i\omega_v \dot{u} - \frac{g}{l}u \quad (4.13)$$

Hierbei ist  $u = x + iy$ .

Den Term mit  $\dot{u}$  wird man durch die Substitution

$$\tilde{u} := ue^{i\omega_v t}$$

los. Denn leitet man  $\tilde{u}$  ab, erhält man

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{u}} &= iu\omega_v e^{i\omega_v t} + \dot{u}e^{i\omega_v t} \\ \ddot{\tilde{u}} &= (\ddot{u} + 2i\omega_v \dot{u} - \omega_v^2 u) e^{i\omega_v t}\end{aligned}$$

Verwendet man nun (4.13), so vereinfacht sich die rechte Seite:

$$\ddot{\tilde{u}} = \left(-\frac{g}{l}u - \omega_v^2 u\right) e^{i\omega_v t} = -\Omega^2 \tilde{u}$$

Hierbei wurde  $\frac{g}{l} + \omega_v^2 =: \Omega^2$  gesetzt. Diese Gleichung beschreibt Ellipsen. Schreibt man  $\tilde{u} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ , so lautet die Lösung

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= A \cos \Omega t \\ \tilde{y} &= B \sin \Omega t\end{aligned}$$

Nun müssen wir nur noch auf unser ursprüngliches, fest mit der Erdoberfläche verbundenes Koordinatensystem zurücktransformieren. Wir hatten

$$x + iy = u = \tilde{u}e^{-i\omega_v t} = (\tilde{x} + i\tilde{y})(\cos \omega_v t - i \sin \omega_v t)$$

Dies läßt sich auch als Matrixgleichung schreiben:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \omega_v t & \sin \omega_v t \\ -\sin \omega_v t & \cos \omega_v t \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Die Matrix  $D$  ist eine Drehmatrix. Also ist das ursprüngliche Koordinatensystem  $x, y$  gegenüber dem  $\tilde{x}, \tilde{y}$  nur um den Winkel  $\omega_v t$  gedreht. Im Tilde-System erhielten wir Ellipsen, also ergeben sich im fest mit der Erde verbundenen System Ellipsen, deren Hauptachsen sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_v = \omega \sin \psi$  entgegen der Erdrotation drehen.

Die Frequenz des Pendels  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \omega_v^2}$  ist etwas größer als die des nichtrotierenden Pendels, welche bekanntlich  $\sqrt{\frac{g}{l}}$  beträgt. Für  $l = 10m$  beträgt der relative Unterschied etwa  $10^{-8}$ . was sehr wenig ist.

Besonders einfach zu realisieren sind folgende Anfangsbedingungen: Das Pendel wird ausgelenkt und in Ruhe losgelassen. Das entspricht

$$x = a, \quad \dot{x} = 0, \quad y = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \text{für } t = 0$$

Für  $t = 0$  ergibt sich so aus (4.14)

$$\tilde{x} = a \quad \tilde{y} = 0$$

Beim Ableiten von (4.14) sollte man nicht vergessen, auf der rechten Seite die Produktregel anzuwenden. Damit erhält man (nach Auflösen)

$$\dot{\tilde{x}} = 0 \quad \dot{\tilde{y}} = \omega_v a$$

Also ist

$$A = a \quad \text{und} \quad B = \frac{\omega_v A}{\Omega}$$

Da  $\frac{\omega_v}{\Omega} \ll 1$  handelt es sich um sehr enge Ellipsen. Sie drehen sich mit  $\omega_v = \Omega \sin \psi \approx \sin \psi \frac{15^\circ}{h}$ .

# 5 Mechanik von Massenpunktsystemen

## Inhalt

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>5.1 Grundlagen</b> . . . . .   | <b>44</b> |
| 5.1.1 Erhaltungssätze . . . . .   | 44        |
| 5.1.2 Potentiale und Energieerhaltung . . . . .                                 | 46        |
| 5.1.3 Lagrange Gleichungen und geschwindigkeitsabhängige Potentiale . . . . .   | 48        |
| <b>5.2 Das Zweikörperproblem</b> . . . . .                                      | <b>49</b> |
| 5.2.1 Reduzierung auf Einkörperproblem bei Abwesenheit äußerer Kräfte . . . . . | 49        |
| 5.2.2 Zweikörperstoß . . . . .  | 50        |
| 5.2.3 Spezialfall: Ruhendes Target mit $Q = 0$ . . . . .                        | 52        |
| 5.2.4 Energietransfer bei ruhendem Target mit $Q = 0$ . . . . .                 | 55        |
| <b>5.3 Der Streuquerschnitt</b> . . . . .                                       | <b>56</b> |
| <b>5.4 Streuung am Zentralkraftfeld</b> . . . . .                               | <b>57</b> |
| 5.4.1 Beispiel: Die Rutherford-Streuung . . . . .                               | 58        |

---

In diesem Kapitel wollen wir Systeme aus mehreren Massenpunkten untersuchen. Da *viele* Teilchen jedoch schnell unübersichtlich werden, handelt ein großer Teil dieses Kapitels von Systemen aus *zwei* Teilchen...

## 5.1 Grundlagen

### 5.1.1 Erhaltungssätze

Für jeden einzelnen Massenpunkt gilt (mal wieder) Newton:

$$\frac{d}{dt}(m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (5.1)$$

$\mathbf{F}^{(e)}$  sind wieder die äußeren Kräfte („e“ wie *eingepägt*),  $\mathbf{F}_{ij}$  sind die Kräfte, die zwischen einzelnen Massenpunkten wirken. Zur Schreiberleichterung wurde die Konvention  $\mathbf{F}_{ii} = 0$  verwendet. Die Massen seien konstant:  $m_i = \text{const.}$  Weiterhin gelte *actio = reactio* für die inneren Kräfte:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (5.2)$$

Summieren wir (5.1) über alle Massenpunkte, so erhalten wir

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \underbrace{\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij}}_{=0} \quad (5.3)$$

Der letzte Summand verschwindet wegen (5.2):

$$\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i,j} -\mathbf{F}_{ji} = -\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ji} = -\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij}$$

Nun brauchen wir einige Namen. **Definition:**

Gesamtmasse

$$M := \sum_i m_i$$

Massenmittelpunktvektor (Schwerpunktvektor)

$$\mathbf{R} := \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

Gesamtimpuls

$$\mathbf{P} := \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

Gesamtdrehimpuls

$$\mathbf{L} := \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$$

Gesamtdrehmoment

$$\mathbf{N} := \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}$$

Mit diesen Bezeichnungen wird aus (5.3)

$$M \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{R} = \mathbf{F}^{(e)} := \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}$$

Also das *Schwerpunktprinzip*:

Der Massenmittelpunkt bewegt sich so, als ob die gesamte Kraft auf die im Massenmittelpunkt konzentrierte Masse wirkt.

Wirken keine äußeren Kräfte, ist  $\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = 0$ , also  $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \text{const.}$  Dies ist der *Impulssatz*:

Ist die äußere Kraft Null, so bleibt der Gesamtimpuls erhalten.

Ein ähnlicher Satz gilt für den Drehimpuls. Um ihn herzuleiten, betrachten wir  $\dot{\mathbf{L}}$ :

$$\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i \underbrace{(\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i)}_{=0} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}$$

Das erste Kreuzprodukt in der Mitte der Gleichungskette verschwindet, da wegen  $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$  natürlich  $\dot{\mathbf{r}}_i \parallel \mathbf{p}_i$  gilt. Für feste  $i$  und  $j$  mit  $i \neq j$  gilt (da  $\mathbf{F}_{ij} \parallel (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ ):

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0.$$

Also verschwindet der letzte Summand und wir erhalten den Drehimpulssatz:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}$$

Der Drehimpuls ist konstant, solange das äußere Drehmoment verschwindet.

### Zerlegung des Gesamtdrehimpulses

Wir zerlegen  $\mathbf{r}_i$  und  $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i$  wie folgt

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \quad \mathbf{v}_i = \underbrace{\dot{\mathbf{R}}}_{=: \mathbf{V}} + \mathbf{v}'_i$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times (m_i \mathbf{V} + m_i \mathbf{v}'_i) \\ &= \mathbf{R} \times M \mathbf{V} + \sum_i (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \end{aligned}$$

Die letzten beiden Terme sind jeweils Null:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = M (\mathbf{R} - \mathbf{R}) = 0 \\ \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} &= \sum_i m_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = M \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} - \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Somit erhalten wir

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i. \quad (5.5)$$

Der Drehimpuls setzt sich also aus zwei Anteilen zusammen. Zum einen aus der Bewegung des Massenmittelpunktes bzgl. des Koordinatenursprungs und zum anderen aus der Bewegung der einzelnen Teilchen um den Massenmittelpunkt.

### Zerlegung der kinetischen Energie

Ähnlich wie beim Drehimpuls zerlegen wir auch die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i)^2 = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}'_i^2 + \underbrace{\mathbf{V} \sum_i m_i \mathbf{v}'_i}_{=0}$$

Den letzten Term haben wir bereits bei der Betrachtung des Drehimpulses wegdiskutiert - siehe (5.4).

Die kinetische Energie besteht also aus der kinetischen Energie der Bewegung des Massenmittelpunktes und aus der kinetischen Energie der Bewegung der Teilchen um den Massenmittelpunkt.

### 5.1.2 Potentiale und Energieerhaltung

Nun wird der Fall von konservativen inneren und äußeren Kräften untersucht.

Die Ableitung nach einem Vektor, die auf den nächsten Seiten häufig vorkommt bedeute:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \\ \frac{\partial}{\partial z_i} \end{pmatrix}.$$

Wie in den Anmerkungen auf Seite 9 schon erwähnt hängen die Kräfte -und damit auch die jeweiligen Potentiale- nur von ganz wenigen Koordinaten ab. Deshalb lassen sich die äußeren Kräfte schreiben als:

$$\mathbf{F}_i^{(e)} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U_i^{(e)}(\mathbf{r}_i) = -\left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \\ \frac{\partial}{\partial z_i} \end{array} \right) U_i^{(e)}(x_i, y_i, z_i)$$

( $U_i$  hängt nur von  $\mathbf{r}_i$  ab.) Die inneren Kräfte lassen sich schreiben als

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} f_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = -\mathbf{F}_{ji}$$

Hierbei ist  $f_{ij}$  nur eine Funktion des *Abstandes* zwischen den beiden Punkten. Wählt man nun das Potential  $U_{ij}$  so, daß  $U'_{ij} = -f'_{ij}$  gilt, so erhalten wir wegen  $\frac{\partial |\mathbf{x}|}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ :

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

In diesem  $U_{ij}$  ist dann sowohl die Kraft  $\mathbf{F}_{ij}$  als auch  $\mathbf{F}_{ji}$  enthalten.

Das Gesamtpotential ist nun einfach die Summe aus allen Einzelpotentialen. Bei den Potentialen der Inneren Kräfte muß man beachten, daß jedes  $U_{ij}$  *zwei* Kräfte beschreibt.

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{k=1}^N U_k^{(e)}(\mathbf{r}_k) + \sum_{\substack{k, l = 1 \\ k < l}}^N U_{kl}(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|)$$

Probe: Ableiten sollte die Kräfte liefern:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = -\frac{\partial U_i^{(e)}}{\partial \mathbf{r}_i} - \sum_{l>i} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_l}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_l|} U'_{li}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_l|) - \sum_{k<i} \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|} U'_{ki}(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|)$$

Der erste Term kommt von  $U^{(e)}$ , die anderen beiden von  $U_{kl}$ . Und zwar sind im mittleren genau die Summanden der Summe  $\sum_{k,l}$  berücksichtigt, bei denen  $k = i$  ist, im letzten Term die, bei denen  $l = i$  gilt (alle anderen hängen nicht von  $\mathbf{r}_i$  ab, fallen beim Ableiten also weg). Verwenden wir weiter  $U_{il} = U_{li}$ , ergibt sich:

$$\dots = -\frac{\partial U_i^{(e)}}{\partial \mathbf{r}_i} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_l}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_l|} U'_{il}(|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_i|) = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{l=1}^N \mathbf{F}_{il}$$

## Energiesatz

Bevor wir uns dem Energieerhaltungssatz zuwenden können brauchen wir erst eine kurze Nebenrechnung:

$$\frac{d}{dt} U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i$$

Das ist bereits die ganze Rechnung. Nun die Erklärung dazu: Wir wollen die totale Ableitung einer Funktion mehrerer Veränderlicher ausrechnen:

$$\frac{d}{dt} U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{d}{dt} U(x_1(t), y_1(t), z_1(t), \dots, x_N(t), y_N(t), z_N(t))$$

Dazu brauchen wir die Kettenregel

$$\frac{d}{dt}U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = \frac{\partial U}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial z_N} \dot{z}_N$$

Verwenden wir jetzt noch symbolische Skalarprodukte, erhalten wir

$$\frac{dU}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U}{\partial y_1} \\ \frac{\partial U}{\partial z_1} \end{pmatrix}}_{\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{r}}_1} + \dots + \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_N} \\ \frac{\partial U}{\partial y_N} \\ \frac{\partial U}{\partial z_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_N \\ \dot{y}_N \\ \dot{z}_N \end{pmatrix}$$

oder, noch kürzer:

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i$$

Diese Formel und  $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}$  brauchen wir in der nächsten Zeile:

$$\frac{d}{dt}T = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i = -\frac{d}{dt}U$$

Also gilt  $\frac{d}{dt}(T + U) = 0$ . Und dies ist die Energieerhaltung:

$$T + U = \text{const.} \equiv E$$

### 5.1.3 Lagrange Gleichungen und geschwindigkeitsabhängige Potentiale

Wir haben inzwischen zwei Formen für die Lagrange-Gleichungen zweiter Art, die sich aber nur schreibtechnisch unterscheiden. Zum einen können wir sie -wie bisher- für jede Koordinate einzeln niederschreiben:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, 3N$$

oder wir verwenden die Schreibweise mit Ableitungen nach Vektoren:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, N$$

Freilich bedeutet  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i}$  dasselbe wie  $(\frac{\partial}{\partial x_{3i-2}}, \frac{\partial}{\partial x_{3i-1}}, \frac{\partial}{\partial x_{3i}})$ . Schreibt man also die zweite Form der Gleichungen komponentenweise, so erhält man sofort die erste.

Manchmal läßt sich auch ein **verallgemeinertes Potential für geschwindigkeitsabhängige Kräfte** angeben:

Wir haben Kräfte der Form

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t)$$

Solange es ein  $U = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t)$  gibt, für das

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}$$

gilt, bleibt die Form der Lagrange-2-Gleichungen erhalten<sup>1</sup>. Dies gilt auch für generalisierte Koordinaten. (ohne Beweis)

<sup>1</sup>Ganz normal:  $L = T - U$  und  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$

**Beispiel : Ein Elektron im  $E$  und  $B$  Feld**

Für unser Elektron gilt

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$$

Wie Ihr im fünften Semester erfahren werdet, gibt es ein Vektorfeld  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  und ein skalares Feld  $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$ , so daß gilt

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Damit können wir unser Potential hinschreiben:

$$U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = e\Phi(\mathbf{r}, t) - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

Wie so oft besteht der Beweis aus Nachrechnen. Bei der folgenden Rechnung ist  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} &= -e \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - e \dot{x}_j \frac{\partial}{\partial x_i} A_j + \frac{d}{dt} (-e A_i(\mathbf{r}, t)) \\ &= -e \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + e \left( \underbrace{\dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j - \frac{\partial A_i}{\partial t}}_{=(\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}))_i} \right) \\ &= \left( -e \left( \nabla \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + e \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \right)_i \end{aligned}$$

**5.2 Das Zweikörperproblem**

Nun wollen wir uns auf den Fall  $N = 2$  konzentrieren. Wir hatten es schon beim Kepler-Problem mit zwei Teilchen (naja, eher Sonne und Planet) zu tun. Damals haben wir stillschweigend angenommen, daß die Sonne ruht. Nun wollen wir diese Annahme begründen:

**5.2.1 Reduzierung auf Einkörperproblem bei Abwesenheit äußerer Kräfte**

Bei Abwesenheit äußerer Kräfte hängt das Potential nur vom Betrag des Differenz-Vektors  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  ab<sup>2</sup>. Die Lagrange-Funktion lautet also

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$$

Wir wählen nun den Schwerpunkt als Ursprung unseres Koordinatensystems. Durch diese Translation wird weder  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  noch  $\dot{\mathbf{r}}_i$  geändert, die Lagrange-Funktion ändert sich also auch nicht. Dann gilt

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = 0 \quad (5.6)$$

Ferner führen wir den Abstandsvektor  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  ein. Aus (5.6) folgt

$$-\mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_2} \mathbf{r}_1 \Rightarrow \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \frac{m_1}{m_2} \mathbf{r}_1 \Rightarrow \tilde{\mathbf{r}} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{r}_1,$$

also:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \tilde{\mathbf{r}}$$

<sup>2</sup>Hier offenbaren sich tiefe Zusammenhänge. Würde das Potential von den absoluten Koordinaten  $\mathbf{r}_i$  abhängen, so wären verschiedene Raumpunkte nicht gleichberechtigt. Die Homogenität des Raumes wäre verletzt. Würde der Differenzvektor eingehen und nicht nur der Betrag, so wären verschiedene Richtungen nicht mehr gleichwertig. Die Isotropie wäre verletzt.

Analog geht

$$\mathbf{r}_2 = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} \tilde{\mathbf{r}}$$

Setzen wir das alles in die Lagrange-Funktion  $L$  ein, kann man  $\dot{\tilde{\mathbf{r}}}$  ausklammern und erhält

$$L = \frac{1}{2} \underbrace{\left( m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \right)}_{=:\mu} \dot{\tilde{\mathbf{r}}}^2 - V(|\tilde{\mathbf{r}}|)$$

Den Ausdruck in der runden Klammer nennen wir *reduzierte Masse*. Er läßt sich weiter vereinfachen:

$$\mu = m_1 m_2 \left( \frac{m_2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_1}{(m_1 + m_2)^2} \right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \quad (5.7)$$

Die Lagrange-Funktion lautet somit

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\tilde{\mathbf{r}}}^2 - V(|\tilde{\mathbf{r}}|) \quad (5.8)$$

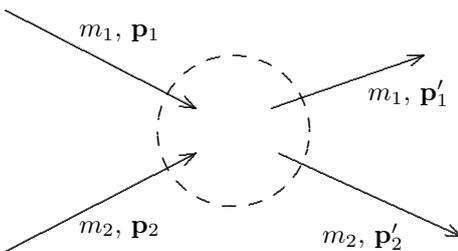
$L$  ist also formal die Lagrange-Funktion eines fiktiven Teilchens mit der Masse  $\mu$ , das sich im Zentralpotential  $V(|\tilde{\mathbf{r}}|)$  bewegt.

Damit ist die Näherung die wir beim Keplerproblem verwendet haben, gerechtfertigt. Denn wegen  $m_S \gg m_E$  ist  $\mu \approx m_E$ . Ferner gilt für den Vektor Schwerpunkt-Sonne  $\mathbf{r}_S = \frac{m_E}{m_E + m_S} \tilde{\mathbf{r}} \approx 0$ . Es ist also auch gerechtfertigt, den Koordinatenursprung (und damit das Zentrum des Potentials) in den Sonnenmittelpunkt zu legen.

## 5.2.2 Zweikörperstoß

Zwei Teilchen können sich entweder umkreisen (das hatten wir bereits) oder sie können sich stoßen - das kommt jetzt.

Ein Stoß ist per definitionem eine Wechselwirkung in einem hinreichend kurzreichweitigen Potential.



Wir verwenden folgende Notationen:

Im Laborsystem heißen die Geschwindigkeiten vor bzw. nach dem Stoß

$$\dot{\mathbf{r}}_i \quad \text{bzw.} \quad \dot{\mathbf{r}}'_i \quad (i = 1, 2).$$

Im Schwerpunktsystem sind diese

$$\tilde{\dot{\mathbf{r}}}_i \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\dot{\mathbf{r}}}'_i.$$

Diese beiden Bezugssysteme bewegen sich gerade mit der Schwerpunktgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{R}}$  gegeneinander. Also gilt

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}}_i - \tilde{\dot{\mathbf{r}}}_i = \dot{\mathbf{r}}'_i - \tilde{\dot{\mathbf{r}}}'_i \quad (5.9)$$

Aus der Impulserhaltung folgt im Laborsystem:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \text{const.}$$

Und im Schwerpunktsystem:

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}'_1 + \tilde{\mathbf{p}}'_2 = 0$$

Im Schwerpunktsystem gilt also

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = -\tilde{\mathbf{p}}_2 \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{p}}'_1 = -\tilde{\mathbf{p}}'_2 \quad (5.10)$$

Die Energieerhaltung liefert

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} &= \sum_i \frac{\mathbf{p}'_i{}^2}{2m_i} + Q \\ \sum_i \frac{\tilde{\mathbf{p}}_i^2}{2m_i} &= \sum_i \frac{\tilde{\mathbf{p}}'_i{}^2}{2m_i} + \tilde{Q} \end{aligned} \quad (5.11)$$

$Q$  und  $\tilde{Q}$  sind die beim Stoß verlorengehenden Bewegungsenergien. Da die verlorengegangene Energie nicht vom Bezugssystem abhängen darf, muß  $Q = \tilde{Q}$  gelten. Das ist eine Möglichkeit, unsere Rechnung zu überprüfen. Ist  $Q \neq \tilde{Q}$ , so ist irgendetwas falsch. Also

$$\begin{aligned} Q &= \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2 - \mathbf{p}'_i{}^2}{2m_i} \\ &= \sum_i \frac{m_i}{2} (\dot{\mathbf{r}}_i^2 - \dot{\mathbf{r}}'_i{}^2) \\ &= \sum_i \frac{m_i}{2} \left\{ (\dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{R}})^2 - (\dot{\mathbf{r}}'_i + \dot{\mathbf{R}})^2 \right\} \\ &= \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} (\dot{\mathbf{r}}_i^2 - \dot{\mathbf{r}}'_i{}^2)}_{=\tilde{Q}} + \underbrace{\sum_i m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}'_i) \dot{\mathbf{R}}}_{=0} \\ &= \tilde{Q} \end{aligned}$$

Die zweite Summe verschwindet, da im Schwerpunktsystem  $\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = 0$  gilt. Glück gehabt, Test bestanden.

Nun unterscheidet man folgende Fälle:

$Q = 0$ : elastischer Stoß

$Q > 0$ : inelastischer Stoß

$Q < 0$ : Umwandlung von innerer Energie in thermische Energie, z.B. spontane Emission von Teilchen in der Kernphysik.

Setzt man (5.10) in (5.11) ein, erhält man

$$\frac{\tilde{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{(-\tilde{\mathbf{p}}_1)^2}{2m_2} = \frac{\tilde{\mathbf{p}}'_1{}^2}{2m_1} + \frac{(-\tilde{\mathbf{p}}'_1)^2}{2m_2} + Q$$

oder mit der reduzierten Masse  $\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ :

$$\frac{\tilde{\mathbf{p}}_1^2}{2\mu} = \frac{\tilde{\mathbf{p}}'_1{}^2}{2\mu} + Q$$

Ersetzt man  $\mathbf{p}_1$  durch  $\mathbf{p}_2$ , so erhält man analog

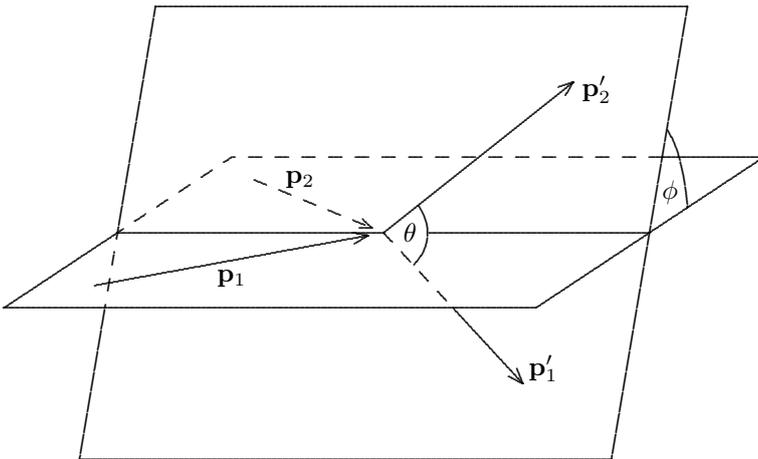
$$\frac{\tilde{\mathbf{p}}_2^2}{2\mu} = \frac{\tilde{\mathbf{p}}'_2{}^2}{2\mu} + Q$$

Also ist der Betrag von  $\tilde{\mathbf{p}}'_i$  bestimmt:

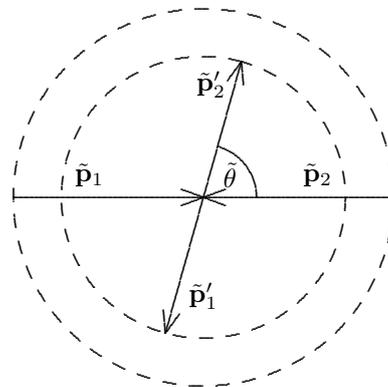
$$|\tilde{\mathbf{p}}'_i| = \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}_i^2 - 2\mu Q}, \quad i = 1, 2 \quad (5.12)$$

Allerdings sind noch zwei Winkel unbestimmt, die nur aus weiteren Details des Stoßprozesses ermittelt werden können.

Im Laborsystem sind dies der Winkel  $\theta$  zwischen den beiden davonsausenden Teilchen und die Orientierung der Ebene, in der sich die Teilchen nach dem Stoß bewegen. Diese kann nämlich gegenüber der 'Einfallebene' um einen Winkel  $\phi$  gedreht sein, Einfalls- und Ausfallebene stimmen also im allgemeinen nicht überein:



Im Schwerpunktsystem liegen ja  $\tilde{\mathbf{p}}_1$  und  $\tilde{\mathbf{p}}_2$  bzw.  $\tilde{\mathbf{p}}'_1$  und  $\tilde{\mathbf{p}}'_2$  auf einer Geraden. Unbestimmt ist hier der Winkel  $\tilde{\theta}$  zwischen den beiden Geraden und die Lage der durch diese beiden Geraden aufgespannten Ebene. Das Bild zeigt nur die Ebene. Die Impulse nach dem Stoß sind kleiner als die zuvor, also geht bei dem hier gezeigten Stoß Energie verloren:  $Q > 0$ .



### 5.2.3 Spezialfall: Ruhendes Target mit $Q = 0$

Nun wollen wir einen Spezialfall genauer diskutieren. Wie schon gesagt, können wir zwar nicht die genauen Richtungen der davonfliegenden Teilchen bestimmen, aber es lassen sich doch einige Aussagen treffen. Die Hauptschwierigkeit liegt nicht in den Rechnungen, sondern bei den vielen verschiedenen Variablen. 1 oder 2, Strich oder kein Strich, Tilde oder keine Tilde... Aber wenn man sich an den Formeln festhält, verliert man nicht den Überblick.

Es sei also

$$\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}_2 = 0.$$

Zuerst kommen einige jeweils einzellige Rechnungen. Man vergesse nicht, daß  $M = m_1 + m_2$  gilt. Für den Schwerpunkt erhalten wir:

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{M} \dot{\mathbf{r}}_1$$

Wegen (5.9) gilt  $m_1 \dot{\mathbf{R}} = m_1(\dot{\mathbf{r}}_1' - \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1') = \mathbf{p}'_1 - \tilde{\mathbf{p}}'_1$ . Damit ergibt sich

$$\mathbf{p}'_1 = m_1 \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{p}}'_1 = \frac{m_1}{M} \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}'_1 \quad (5.13)$$

Die Impulserhaltung  $\mathbf{p} = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$  stellen wir um:

$$\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p} - \mathbf{p}'_1 = \mathbf{p} - \left( \frac{m_1}{M} \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}'_1 \right) = \frac{m_2}{M} \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}'_1 \quad (5.14)$$

Die Impulse nach dem Stoß sind also bis auf den Summanden  $\tilde{\mathbf{p}}'_1$  festgelegt. Von diesen kennen wir wegen (5.12) aber bereits die Länge. Es bleiben also zwei Freiheitsgrade übrig -wie es sein sollte.

Aus (5.9) folgt  $\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 + \dot{\mathbf{R}}$ . Das verwenden wir in der nächsten Zeile:

$$\mathbf{p} = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 = m_1(\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 + \dot{\mathbf{R}}) = m_1 \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 + \frac{m_1}{M} M \dot{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{p}}_1 + \frac{m_1}{M} \mathbf{p}$$

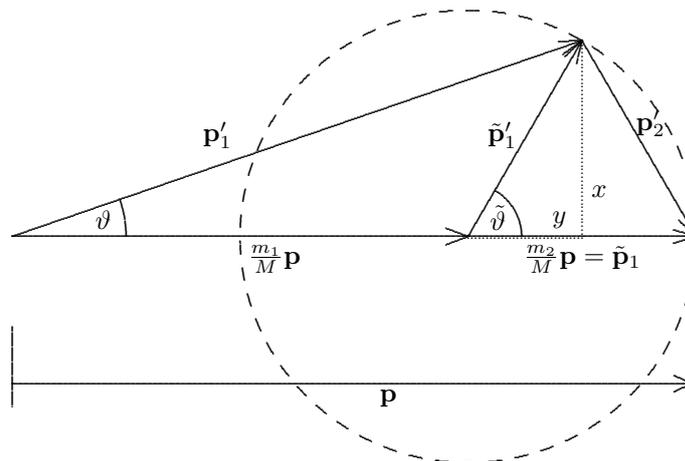
Auflösen liefert hieraus:

$$\mathbf{p} = \frac{M}{m_2} \tilde{\mathbf{p}}_1 \quad (5.15)$$

Wir setzen  $Q = 0$  in (5.12) ein und verwenden (5.15):

$$|\tilde{\mathbf{p}}'_1| = |\tilde{\mathbf{p}}_1| = \frac{m_2}{M} |\mathbf{p}| \quad (5.16)$$

Genug der Rechnungen; jetzt zeichnen wir ein richtig schönes Impulsdiagramm.



Gut, gell? Jetzt die Erklärungen dazu:

Das große Dreieck stellt die Impulserhaltung  $\mathbf{p} = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$  dar. In dieses Dreieck wurde jetzt noch die Gleichung (5.14) eingezeichnet. Das ist noch ein Dreieck.  $\mathbf{p}'_2$  kommt in beiden Dreiecken vor, diese Seite der Dreiecke stimmt also überein. Die zweite Seite des kleinen Dreiecks ist  $\frac{m_2}{M} \mathbf{p}$  und ist parallel zu  $\mathbf{p}$  - der kleine Pfeil am rechten Ende von  $\mathbf{p}$ . Damit ist dann natürlich auch  $\tilde{\mathbf{p}}'_1$  festgelegt. Von  $\tilde{\mathbf{p}}'_1$  kennen

wir aber die Länge (siehe (5.16)). Also muß die Spitze von  $\tilde{\mathbf{p}}'_1$  auf dem gestrichelten Kreis liegen, der gerade durch die Spitze von  $\frac{m_2}{M}\mathbf{p}$  geht. Das bedeutet, daß auch die Spitze von  $\mathbf{p}'_1$  auf diesem Kreis liegt (!).  $\frac{m_1}{M}\mathbf{p}$  schließlich erhalten wir durch Subtraktion  $\mathbf{p} - \frac{m_2}{M}\mathbf{p}$ .

Jetzt fehlen nur noch die Winkel.  $\vartheta$  ist schlicht und einfach der Winkel zwischen Einfall- und Ausfallrichtung des Teilchens 1.  $\tilde{\vartheta}$  ist der Winkel zwischen  $\tilde{\mathbf{p}}_1$  und  $\tilde{\mathbf{p}}'_1$ . Und wegen (5.15) gilt gerade  $\tilde{\mathbf{p}}_1 = \frac{m_2}{M}\mathbf{p}$ .  $x$  und  $y$  brauchen wir gleich:

Jetzt leiten wir eine Beziehung zwischen  $\vartheta$  und  $\tilde{\vartheta}$  her. Es gilt

$$x = |\tilde{\mathbf{p}}'_1| \sin \tilde{\vartheta}, \quad y = |\tilde{\mathbf{p}}'_1| \cos \tilde{\vartheta}$$

Damit haben wir

$$\tan \vartheta = \frac{x}{y + \frac{m_1}{M}|\mathbf{p}|} = \frac{\sin \tilde{\vartheta}}{\cos \tilde{\vartheta} + \frac{m_1}{M} \frac{|\mathbf{p}|}{|\tilde{\mathbf{p}}'_1|}}$$

Der zweite Summand im Nenner ist so wichtig, daß wir ihm den Namen  $\gamma$  geben wollen. Er läßt sich mit (5.16) auch noch vereinfachen:

$$\gamma = \frac{m_1}{M} \frac{|\mathbf{p}|}{|\tilde{\mathbf{p}}'_1|} = \frac{m_1}{M} \frac{M}{m_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

Ergo

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \vartheta}{\gamma + \cos \vartheta} \quad (5.17)$$

### Fallunterscheidung

a.)  $m_1 > m_2$ :  $\gamma > 1$

Wir haben immer noch die Beziehung

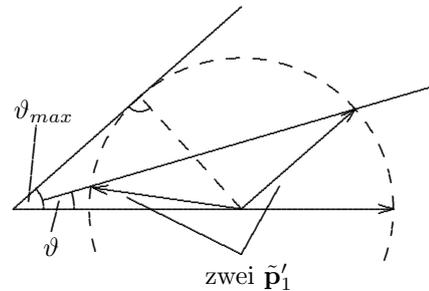
$$|\tilde{\mathbf{p}}'_1| = \frac{m_2}{M}|\mathbf{p}| < \frac{m_1}{M}|\mathbf{p}|$$

Das heißt, der Kreis schneidet die Grundlinie zweimal. Da die Spitze von  $\mathbf{p}'_1$  auf der Kreislinie liegt, gibt es einen maximalen Streuwinkel  $\vartheta_{max}$ , den man aus dem eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck berechnen kann:

$$\sin \vartheta_{max} = \frac{|\tilde{\mathbf{p}}'_1|}{\frac{m_1}{M}|\mathbf{p}|} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{\gamma}$$

Die physikalische Konsequenz hieraus ist: Es existiert nur Vorwärtsstreuung (des einfallenden Teilchens) in einem Kegel mit dem Öffnungswinkel  $\vartheta_{max}$ .

Weiterhin gibt's zu jedem  $\vartheta < \vartheta_{max}$  zwei Paare  $\tilde{\mathbf{p}}'_1, \tilde{\mathbf{p}}'_2$ .

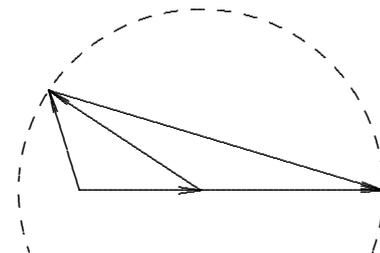


b.)  $m_2 > m_1$ :  $\gamma < 1$

Jetzt ist der Kreisdurchmesser größer als die Grundlinie:

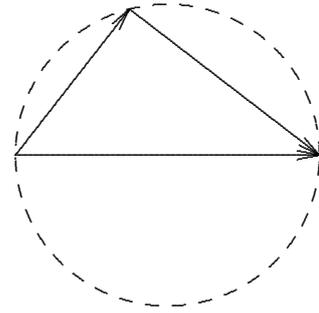
$$|\tilde{\mathbf{p}}'_1| = \frac{m_2}{M}|\mathbf{p}| > \frac{m_1}{M}|\mathbf{p}|$$

Alle Streuwinkel sind möglich.  
Man beschrifte das Diagramm selbst!



c.)  $m_1 = m_2, \gamma = 1$

Nun ist der Durchmesser des Kreises gleich der Grundlinie  $\mathbf{p}$ . Wir erhalten also ein rechtwinkliges Dreieck, ganz wie in der Schule, so Thaleskreis und so. Unsere Teilchen fliegen also stets im Winkel von  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$  auseinander. Die einzige Ausnahme bildet der Zentralstoß. Wenn  $\vartheta = \pi$  ist, dann erhalten wir  $\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1$  und  $\mathbf{p}'_1 = 0$ . Die beiden Teilchen tauschen also ihre Rolle.



### 5.2.4 Energietransfer bei ruhendem Target mit $Q = 0$

Nun untersuchen wir, wieviel Energie auf das ruhende Teilchen übertragen wird, eine Frage, die besonders bei Teilchenbeschleunigern interessiert.

Vor dem Stoß sind die kinetischen Energien  $T = T_1 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_1}$  und  $T_2 = 0$ .

Nach dem Stoß gilt

$$T = T'_1 + T'_2 = \frac{\mathbf{p}'_1{}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}'_2{}^2}{2m_2}$$

Unter *Energietransfer* verstehen wir

$$\eta := \frac{T'_2}{T_1},$$

also den Bruchteil der gesamten kinetischen Energie, der vom Teilchen 1 auf das Teilchen 2 übertragen wird.

Den wollen wir jetzt ausrechnen. Dazu verwenden wir zuerst (5.14):

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{m_1 \mathbf{p}'_2{}^2}{m_2 \mathbf{p}^2} \\ &= \frac{m_1 \left( \frac{m_2}{M} \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}'_1 \right)^2}{m_2 \mathbf{p}^2} \\ &= \frac{m_1}{m_2} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \left( \frac{m_2^2}{M^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{m_2}{M} \mathbf{p} \tilde{\mathbf{p}}'_1 + \tilde{\mathbf{p}}_1{}^2 \right) \\ &= \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{m_2^2}{M^2} - 2 \frac{m_2}{M} \frac{|\mathbf{p}| |\tilde{\mathbf{p}}'_1| \cos \tilde{\vartheta}}{|\mathbf{p}|^2} + \frac{|\tilde{\mathbf{p}}'_1|^2}{|\mathbf{p}|^2} \right) \end{aligned}$$

Und nun weiter mit (5.16):

$$\begin{aligned} &= \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{m_2^2}{M^2} - \frac{2m_2^2}{M^2} \cos \tilde{\vartheta} + \frac{m_2^2}{M^2} \right) \\ &= 2 \frac{m_1 m_2}{M^2} (1 - \cos \tilde{\vartheta}) \\ \eta &= 2 \frac{\mu}{M} (1 - \cos \tilde{\vartheta}) \end{aligned}$$

Der Energietransfer ist also maximal beim Zentralstoß  $\tilde{\vartheta} = \pi$ . Dann gilt

$$\eta = 4 \frac{m_1 m_2}{M^2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Es gilt stets  $\eta \leq 1$ , denn aus der zweifellos wahren Ungleichung  $0 \leq (m_1 - m_2)^2$  folgt durch Addition von  $4m_1m_2$ :

$$4m_1m_2 \leq (m_1 + m_2)^2.$$

$\eta = 1$  ist nur für den Zentralstoß bei  $m_1 = m_2$  erfüllt.

Für Umwandlungen steht im Schwerpunktsystem bestenfalls die dort vorhandene kinetische Energie zur Verfügung. Diese ist

$$\tilde{T}'_1 + \tilde{T}'_2 = \frac{\tilde{\mathbf{p}}_1'^2}{2m_1} + \frac{\tilde{\mathbf{p}}_2'^2}{2m_2} = \frac{\tilde{\mathbf{p}}_1'^2}{2m_1} + \frac{\tilde{\mathbf{p}}_1'^2}{2m_2} = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 \mathbf{p}^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_1} \frac{m_1m_2^2}{M^2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = T \frac{m_2}{M}$$

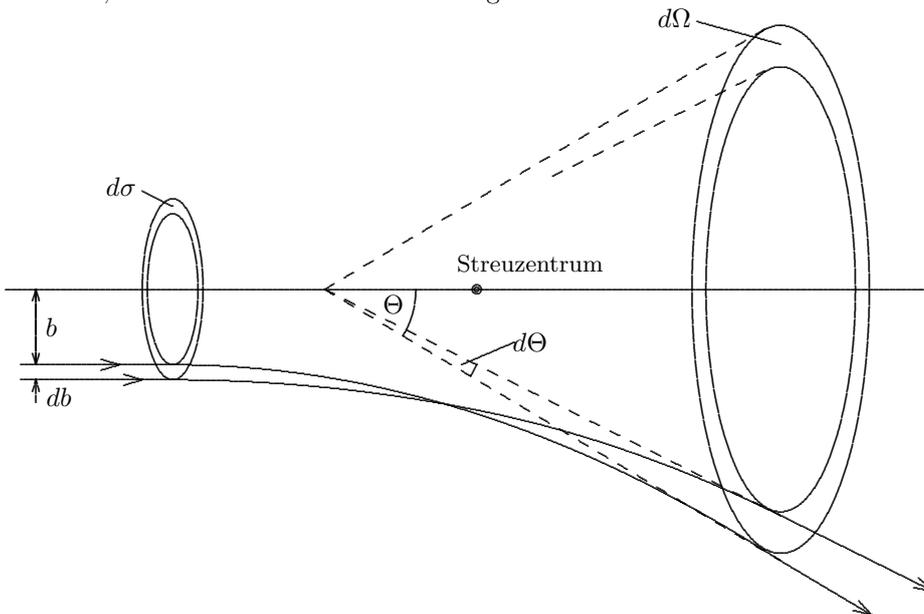
Denn es gilt  $\tilde{\mathbf{p}}'_1 = -\tilde{\mathbf{p}}'_2$  und immer noch (5.16).

Es ist daher nicht zweckmäßig, mit einem schweren Teilchen auf ein leichtes zu schießen. Einfach deswegen, weil dabei kaum Energie frei wird.

Für  $m_1 = m_2$  steht die Hälfte der Laborenergie für Umwandlungen zur Verfügung.

### 5.3 Der Streuquerschnitt

Wir wollen uns auf kugelsymmetrische Potentiale beschränken. Dann muß eine Rotationssymmetrie bzgl. der Achse des einfallenden Strahles vorhanden sein. Die Teilchen, die im kreisförmigen Querschnitt  $d\sigma$  einfallen, werden in den Raumwinkel  $d\Omega$  gestreut.



Der *Stoßparameter*  $b$  ist diejenige Strecke, um die das Teilchen das Target bei kräftefreiem Flug verfehlen würde.

Die Anzahl  $dN$  der pro Zeiteinheit in den Raumwinkel  $d\Omega$  gestreuten Teilchen ist nicht zur Charakterisierung des Streuprozesses geeignet, da dieses  $dN$  proportional der einfallenden Teilchenstromdichte  $n$  ist. Deswegen normiert man durch Division durch  $n$ . So erhält man den *Streuquerschnitt*  $d\sigma$ :

$$d\sigma = \frac{dN}{n} = \frac{\text{Anzahl Teilchen, die pro Sekunde in } d\Omega \text{ gestreut werden}}{\text{Anzahl Teilchen, die pro Sekunde und } m^2 \text{ einfallen}} = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$  heißt *differentieller Wirkungsquerschnitt*.

Ganz wichtig, da häufig im Vordiplom gefragt:

$d\sigma$  hat die Dimension einer Fläche!

Wenn die Teilchen gleichmäßig einfallen, werden genau soviele Teilchen in den Bereich  $d\Omega$  gestreut, wie auf der Fläche  $d\sigma$  einfallen.

Wie man der Skizze entnehmen kann, gilt

$$d\sigma = 2\pi b db$$

und

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

Daraus ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (5.18)$$

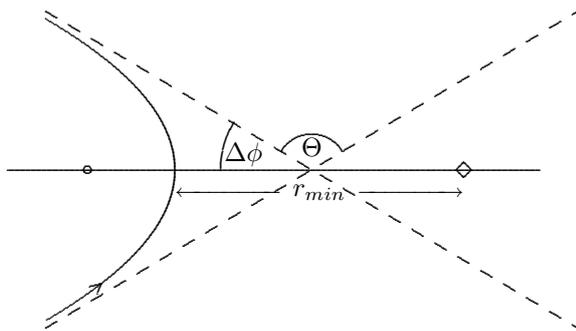
Das ‚-‘ Zeichen ist erforderlich, da sich  $b$  und  $\theta$  gegenläufig ändern. Wird  $b$  größer, d.h.  $db > 0$ , dann wird  $\theta$  i. a. kleiner (weit entfernte Teilchen werden weniger beeinflusst als nahe), d.h.  $d\theta < 0$ . Da aber  $d\sigma$  und  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  stets positiv sein müssen (die Anzahl der gestreuten Teilchen ist niemals negativ) benötigt man das ‚-‘ oder Betragstriche.

Der totale Wirkungsquerschnitt ist

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Alle Teilchen, die innerhalb der Fläche  $\sigma_{tot}$  ankommen, werden gestreut. Bei einem Festkörper, an dem unsere Teilchen abprallen, ist gewöhnlich  $\sigma_{tot}$  gleich der Querschnittsfläche.

## 5.4 Streuung am Zentralkraftfeld



Im Fall der Abstoßung befindet sich das Zentrum unseres Zentralkraftfeldes auf der rechten Seite. Das gestreute Teilchen überstreicht also bei seiner Bewegung von  $r_{min}$  nach  $\infty$  den Winkel  $\Delta\phi$ .

Wir haben bereits im Kapitel über das Keplerproblem vorgearbeitet und können direkt Formel (2.19) von Seite 18 verwenden:

$$\Delta\phi = \frac{L_0}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$

(Im Fall der Anziehung befindet sich das Zentrum links „innerhalb“ der Kurve; das Teilchen überstreicht also den Winkel  $\pi - \Delta\phi$ . Dementsprechend muß man dann in der letzten Zeile  $\Delta\phi$  durch  $\pi - \Delta\phi$  ersetzen.)

Damit ergibt sich eine Ablenkung unseres Teilchens um den Winkel

$$\Theta = \pi - 2\Delta\phi = \pi - \frac{2L_0}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$

### 5.4.1 Beispiel: Die Rutherford-Streuung

Beim guten alten Rutherford wurden  $\alpha$ -Teilchen an  $Z$ -fach positiv geladenen Kernen gestreut.

Wir betrachten einen sehr schweren Kern, so daß wir ihn als ruhend annehmen können. Wenn nicht müßten wir mit der reduzierten Masse rechnen und Schwerpunktkoordinaten verwenden.

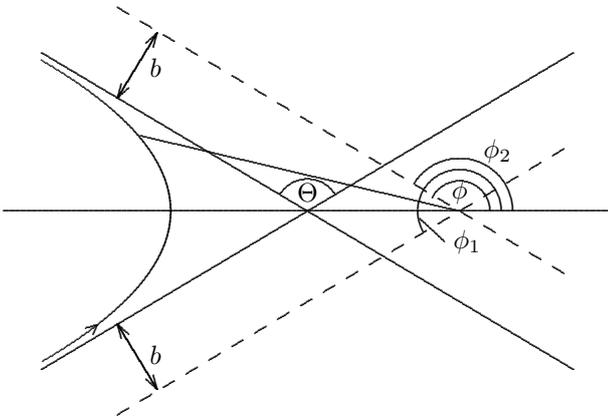
Sind  $q_1$  und  $q_2$  die Ladungen von stoßendem und ruhendem Teilchen, ergibt sich das Potential gemäß Coulomb zu

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = -\frac{\kappa}{r}$$

Es handelt sich also um das Kepler-Problem. Allerdings müßt Ihr beachten, daß  $\kappa$  jetzt auch negativ sein kann.  $\kappa$  ist negativ, wenn  $q_1$  und  $q_2$  gleiches Vorzeichen haben, sich die beiden Teilchen also *abstoßen*. Das ist bei der Rutherford-Streuung der Fall. Dann wird nach Gleichung (2.23) auf Seite 21 auch  $p$  negativ. Da das Streuteilchen aus dem Unendlichen kommt, ist  $E > 0$  wir erhalten also Hyperbelbahnen mit  $\epsilon > 1$ :

$$r = \frac{-|p|}{1 + \epsilon \cos \phi}$$

Zunächst wollen wir den Winkel  $\Theta$  berechnen. Dazu drücken wir zunächst die Exzentrizität  $\epsilon$  durch  $\Theta$  aus. Da wir aber  $\epsilon$  schon aus dem Kepler-Problem kennen, können wir so  $\Theta$  berechnen.



An der Skizze erkennt man, daß  $\phi$  zwischen den beiden Grenzwinkeln  $\phi_{1,2}$  liegen muß, d.h.  $\phi_1 < \phi < \phi_2$ , wobei für diese Grenzwinkel  $1 + \epsilon \cos \phi_{1,2} = 0$  gilt.

Weiterhin sieht man, daß  $\phi_1 - \pi = \pi - \phi_2$  und  $\phi_1 - \phi_2 = \pi - \Theta$  gilt. Aus diesen Gleichungen folgt nun

$$\phi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\Theta}{2}$$

Und damit weiter

$$-\frac{1}{\epsilon} = \cos \phi_2 = \cos \frac{\pi + \theta}{2} = -\sin \frac{\Theta}{2} \quad (5.19)$$

Andererseits kennen wir  $\epsilon$  bereits, nämlich aus Formel (2.23) auf Seite 21:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L_0^2 E}{m\kappa^2}}$$

Wegen  $L_0 = mbv_\infty$  und  $E = \frac{m}{2}v_\infty^2$  gilt

$$2L_0^2 E = 2m^2 b^2 v_\infty^2 E = 4b^2 \frac{m^2}{2} v_\infty^2 E = 4b^2 m E^2.$$

Damit wird  $\varepsilon$  zu

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{4b^2 E^2}{\kappa^2}}$$

Setzt man dies in (5.19) ein, erhält man

$$\frac{1}{\sin \frac{\Theta}{2}} = \sqrt{1 + \frac{4b^2 E^2}{\kappa^2}} \quad (5.20)$$

Schön! Wir haben eine Gleichung zwischen  $b$  und  $\Theta$ . Was wollten wir eigentlich haben? Den Wirkungsquerschnitt! Man erinnere sich an (5.18) und die Zeilen zuvor. Dort war  $d\sigma = 2\pi b db$  und  $d\Omega$  hing von  $\Theta$  ab. In (5.20) fehlen die Differentiale, aber wir könnten ja einfach differenzieren. Ja, und wenn wir vor dem Differenzieren nach  $b^2$  aufgelöst hätten, stünde ja schon ein  $b db$  da!

Genau das kommt jetzt. Auflösen von (5.20) liefert

$$b^2 = \frac{\kappa^2}{4E^2} \left( \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} - 1 \right)$$

Leiten wir nun nach  $\Theta$  ab:

$$2b \frac{db}{d\Theta} = -\frac{\kappa^2}{4E^2} \frac{\cos \frac{\Theta}{2}}{\sin^3 \frac{\Theta}{2}}$$

Dividiert man nun durch  $2 \sin \Theta$  und berücksichtigt  $\sin \Theta = 2 \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2}$ , so erhält man

$$\frac{b}{\sin \Theta} \frac{db}{d\Theta} = -\frac{\kappa^2}{8E^2} \frac{\cos \frac{\Theta}{2}}{\sin^3 \frac{\Theta}{2} \sin \Theta} = -\frac{\kappa^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}$$

Abgesehen davon, daß wir große  $\Theta$ 's statt kleiner  $\theta$ 's verwendet haben, steht genau die Definition (5.18) vom Wirkungsquerschnitt da, wir erhalten die *Rutherfordsche Streuformel*:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\kappa}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}}$$

Wir haben hier der Eleganz halber die Rechnung in einer ungewöhnlichen Richtung gebracht. In der Praxis fängt man mit (5.18) an und setzt nach und nach ein.

#### Anmerkungen:

Der totale Wirkungsquerschnitt divergiert, da die Abschirmung der Kernladung nicht berücksichtigt wird, die bei großem  $b$  und kleinem  $\Theta$  wichtig wird.

Die Rutherford'sche Formel ist unabhängig vom Vorzeichen von  $\kappa$ .

Man erhält dieselbe Formel wenn man die Berechnung mit  $\phi_1$  statt mit  $\phi_2$  beginnt.

Die Rutherford'sche Formel wurde im Schwerpunktsystem abgeleitet. Bei schweren Targets ist sie auch angenähert im Laborsystem gültig; sonst muß auf das Laborsystem umgerechnet werden.

# 6 Schwingungen

## Inhalt

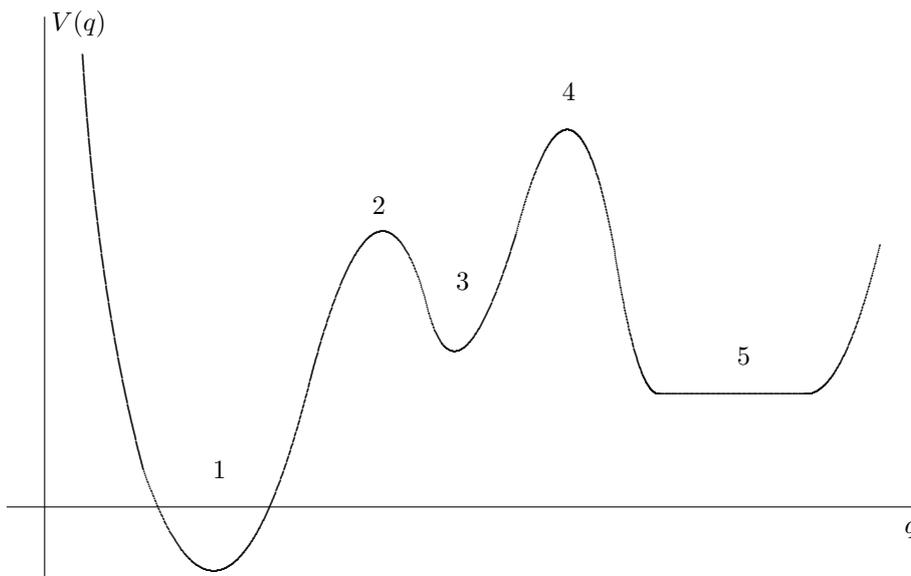
---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>6.1 Vorbemerkungen</b> . . . . .  | <b>60</b> |
| 6.1.1 Linearisierung der Lagrange-Gleichungen . . . . .                        | 61        |
| <b>6.2 Eigenfrequenzen und Normalschwingungen</b> . . . . .                    | <b>64</b> |
| 6.2.1 Lagrange-Funktion in Eigenkoordinaten . . . . .                          | 67        |
| <b>6.3 Einfache Schwingungen</b> . . . . .                                     | <b>70</b> |
| 6.3.1 Harmonischer Oszillator . . . . .  | 70        |
| 6.3.2 Gekoppelte Pendel . . . . .  | 71        |
| 6.3.3 Lissajous-Figuren . . . . .  | 72        |
| <b>6.4 Lineare periodische Kette</b> . . . . .                                 | <b>73</b> |
| <b>6.5 Der gedämpfte harmonische Oszillator</b> . . . . .                      | <b>75</b> |
| 6.5.1 Fall der schwachen Dämpfung: $\omega_0^2 > \beta^2$ . . . . .            | 75        |
| 6.5.2 Aperiodischer Grenzfall: $\omega_0 = \beta$ . . . . .                    | 76        |
| 6.5.3 Fall der starken Dämpfung (Kriechfall): $\beta^2 > \omega_0^2$ . . . . . | 76        |
| <b>6.6 Oszillator mit harmonischer äußerer Kraft</b> . . . . .                 | <b>76</b> |
| <b>6.7 Nichtlineare Schwingungsgleichungen</b> . . . . .                       | <b>78</b> |
| 6.7.1 Allgemeine Vorbemerkungen . . . . .                                      | 78        |
| 6.7.2 Physikalische Konsequenzen . . . . .                                     | 79        |
| 6.7.3 Einfluß einer äußeren Kraft . . . . .                                    | 79        |

---

## 6.1 Vorbemerkungen

Gegeben sei folgendes Potential:



Die Punkte 1 bis 5 sind Gleichgewichtspunkte, befindet sich das System an einem dieser Punkte und ist die Geschwindigkeit  $\dot{q}$  gleich Null, so wird das System in Ruhe bleiben. Diese Punkte haben allerdings verschiedene Eigenschaften:

- An den Punkten 1 und 3 herrscht *stabiles* Gleichgewicht. Lenkt man das System ein wenig aus der Ruhelage aus, wird es dorthin zurückkehren.
- An den Punkten 2 und 4 ist das Gleichgewicht *labil*. Lenkt man dort das System etwas aus, wird es sich sehr weit von diesen Punkten entfernen -, „es rutscht ins Tal“.
- Lenkt man das System schließlich aus der Lage 5 etwas aus, so wird es einfach in der neuen Lage liegen bleiben. Es bewegt sich nicht zurück und auch nicht weiter weg. Ein solches Gleichgewicht nennt man *indifferent*.

Beim stabilen Gleichgewicht kommt das System natürlich nur dann zur Ruhe wenn es z.B. durch Reibung gebremst wird. Sonst wird es sich über den Gleichgewichtspunkt hinaus bewegen und wieder umkehren. Es *schwingt*.

Nun werden wir Schwingungen untersuchen. Die Anzahl der Dimensionen und die Anzahl und Art der Schwingungen sind nicht wichtig für die Behandlung von Schwingungen. Denn wir beginnen mit der Lagrange-Funktion, die ja bis auf die Anzahl der generalisierten Koordinaten immer gleich aussieht.

Gegeben sei ein holonom-skleronomes System mit  $s$  Freiheitsgraden. Dann hängt die Lagrange-Funktion nicht von der Zeit ab, wenn  $q_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) die generalisierten Koordinaten sind, hat die Lagrange-Funktion  $L$  die Form<sup>1</sup>:

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(\mathbf{q})$$

Gleichgewichtspunkte  $\mathbf{q}^{(0)}$  des Systems besitzen die Eigenschaft, daß in ihnen das System nicht von alleine in Bewegung kommt, wenn es dort ruht. In einem solchen Punkt gilt also:  $\dot{\mathbf{q}}(t) \equiv 0$  und  $\mathbf{q}(t) \equiv \mathbf{q}^{(0)}$ . Dies stellt einen Spezialfall dar, der die Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_i} = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, s$$

lösen muß. Da sich das System nicht bewegt, gilt  $T \equiv 0$  und damit auch  $\frac{T}{q_i} \equiv 0$ . Weiterhin hängt  $V$  nicht von den  $\dot{q}_i$  ab, es gilt also  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$ . Die Lagrange-Gleichungen vereinfachen sich also zu

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^{(0)}} = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, s. \quad (6.1)$$

Gleichgewichtspunkte zeichnen sich also dadurch aus, daß in ihnen das Potential eine waagrechte Tangente besitzt bzw. daß dort  $\text{grad}V = 0$  gilt.

Die Dynamik vieler physikalischer Systeme spielt sich in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes ab, zum Beispiel Kristalle, Pendel, elektrische Schwingkreise, Molekülschwingungen. Es lohnt sich also, diesen genauer zu betrachten.

### 6.1.1 Linearisierung der Lagrange-Gleichungen

Als nächstes werden wir die Lagrange-Gleichungen linearisieren. Dazu entwickeln wir das Potential und die kinetische Energie in Taylor-Reihen um einen Gleichgewichtspunkt.

In der Umgebung des Gleichgewichtspunktes können wir neue Koordinaten  $\xi_i$  gemäß

$$q_i = q_i^{(0)} + \xi_i$$

eingeführen.  $\xi$  ist also die Auslenkung des Systems aus der Gleichgewichtslage  $\mathbf{q}^{(0)}$ . Taylor-Entwicklung der Potentialfunktion  $V(\mathbf{q})$  um diese Gleichgewichtslage ergibt

<sup>1</sup>Die Herleitung dieses Ausdrucks für die kinetische Energie findet man auf Seite 111 in Formel (8.11).

$$\begin{aligned}
 V(q_1, \dots, q_s) &= V(q_1^{(0)}, \dots, q_s^{(0)}) + \sum_{i=1}^s \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_i} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^{(0)}}}_{=0} \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^{(0)}}}_{K_{ij}} \xi_i \xi_j + O(|\xi|^3) \\
 &= V(\mathbf{q}^{(0)}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s K_{ij} \xi_i \xi_j + O(|\xi|^3)
 \end{aligned}$$

Da der Nullpunkt des Potentials frei wählbar ist, legen wir ihn in die Gleichgewichtslage, setzen also  $V(\mathbf{q}^{(0)}) = 0$ . Die Terme dritter und höherer Ordnung können vernachlässigt werden, wenn man nur kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage betrachtet (harmonische Näherung). Damit erhalten wir für das Potential  $V$  die quadratische Form

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s K_{ij} \xi_i \xi_j \quad (6.2)$$

oder in Matrixschreibweise<sup>2</sup>:

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\xi} \quad (6.3)$$

mit der Abkürzung<sup>3</sup>

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}. \quad (6.4)$$

Übrigens: Wenn  $V$  ein Minimum hat, heißt das nichts anderes als daß die rechte Seite von (6.3) echt größer Null ist, sobald auch nur ein  $\xi_i \neq 0$  ist. Also ist dann die Matrix  $\mathbf{K}$  positiv-definit.

Wegen  $\dot{q}_i = \dot{\xi}_i$  (die beiden unterscheiden sich nur durch die Konstante  $q_i^{(0)}$ ) gilt für die kinetische Energie

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s \underbrace{a_{ij}(\mathbf{q}^{(0)})}_{M_{ij}} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j + O(|\dot{\xi}|^3)$$

Auch hier können die Terme dritter und höherer Ordnung in der Näherung für kleine Schwingungen vernachlässigt werden. Somit erhalten wir

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s M_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j \quad (6.5)$$

bzw.

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (6.6)$$

wobei

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^{(0)}} \quad (6.7)$$

Da  $T$  nie negativ ist und echt positiv wird, sobald auch nur ein  $\dot{\xi}_i \neq 0$  ist, ist die quadratische Form in (6.6) *positiv-definit* (und damit auch die Matrix  $\mathbf{M}$ ).

<sup>2</sup>Die Transponiert-T's sind in diesem Skript nicht immer geschrieben! Also nicht wundern, wenn mal eins fehlt.

<sup>3</sup> $\mathbf{K}$  ist übrigens die vielleicht noch aus Mathe II bekannte *Hesse-Matrix* des Potentials  $V$ .

So, wir haben jetzt unsere Lagrange-Funktion auf quadratische Terme reduziert:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s (M_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - K_{ij} \xi_i \xi_j) = \frac{1}{2} \dot{\xi} M \dot{\xi} - \frac{1}{2} \xi K \xi \quad (6.8)$$

Setzen wir diese Funktion in die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = 0$$

ein, erhalten wir

$$\sum_{j=1}^s (M_{ij} \ddot{\xi}_j + K_{ij} \xi_j) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, s \quad (6.9)$$

Dies ist ein System linearer, homogener Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. In Matrixschreibweise schaut's so aus:

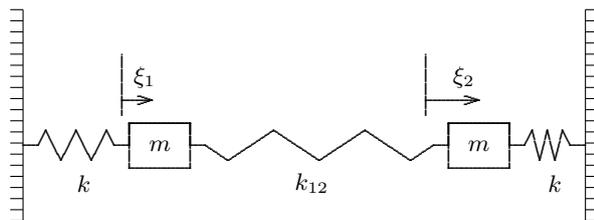
$$M \ddot{\xi} + K \xi = 0 \quad (6.10)$$

Und ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} M_{11} \ddot{\xi}_1 + M_{12} \ddot{\xi}_2 + \dots + M_{1s} \ddot{\xi}_s + K_{11} \xi_1 + \dots + K_{1s} \xi_s &= 0 \\ M_{21} \ddot{\xi}_1 + M_{22} \ddot{\xi}_2 + \dots + M_{2s} \ddot{\xi}_s + K_{21} \xi_1 + \dots + K_{2s} \xi_s &= 0 \\ \vdots & \\ M_{s1} \ddot{\xi}_1 + M_{s2} \ddot{\xi}_2 + \dots + M_{ss} \ddot{\xi}_s + K_{s1} \xi_1 + \dots + K_{ss} \xi_s &= 0 \end{aligned}$$

### Beispiel 1: Zwei gekoppelte Oszillatoren

Wir betrachten ein System von 2 Massenpunkten der Masse  $m$ , die jeweils über eine Feder mit der Federkonstanten  $k$  an eine Wand und über eine Feder mit der Federkonstanten  $k_{12}$  aneinander gekoppelt sind. Als Bewegungsrichtung sei nur die  $x$ -Richtung zugelassen, das System besitzt also zwei Freiheitsgrade.



Es gilt:

$\xi_1$  sei die Auslenkung der Masse 1,  $\xi_2$  die der Masse 2 aus der jeweiligen Gleichgewichtslage  $q_1^{(0)}$  bzw.  $q_2^{(0)}$ . Die Abstände zwischen den Massen und den Wänden seien gerade so bemessen, daß in Ruhe alle Federn entspannt sind.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) \\ V &= \frac{1}{2} k (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{1}{2} k_{12} (\xi_2 - \xi_1)^2 \\ L &= \frac{1}{2} m (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) - \frac{1}{2} k (\xi_1^2 + \xi_2^2) - \frac{1}{2} k_{12} (\xi_2 - \xi_1)^2 \end{aligned}$$

Nach (6.4) und (6.7) gilt für die Matrizen  $K$  und  $M$

$$\begin{aligned} K &= \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun können wir  $V$  bzw.  $T$  wie in (6.3) bzw. (6.6) formulieren:

$$V = \frac{1}{2}(\xi_1 \ \xi_2) \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\xi}_1 \ \dot{\xi}_2) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix}$$

Die entsprechenden Lagrangeschen Gleichungen 2. Art liefern uns ein System von 2 gekoppelten Differentialgleichungen:

$$M\ddot{\xi} + K\xi = 0$$

oder einzeln

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}_1 + (k + k_{12})\xi_1 - k_{12}\xi_2 &= 0 \\ m\ddot{\xi}_2 - k_{12}\xi_1 + (k + k_{12})\xi_2 &= 0 \end{aligned}$$

(Lösen werden wir diese Gleichungen später.)

## 6.2 Eigenfrequenzen und Normalschwingungen

Da zweite partielle Ableitungen vertauschbar sind<sup>4</sup>, erfüllen die Größen  $M_{ij}$  und  $K_{ij}$  die Relationen

$$M_{ij} = M_{ji} \tag{6.11}$$

$$K_{ij} = K_{ji} \tag{6.12}$$

Für die gesuchte Lösung  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$  soll nach (6.10) gelten

$$M\ddot{\xi} + K\xi = 0 \tag{6.13}$$

Da es sich hierbei um eine harmonische Schwingung handelt, lösen wir das Gleichungssystem mit dem komplexen Ansatz. Setzt man

$$\xi = \mathbf{v}e^{i\omega t} \tag{6.14}$$

in (6.13) ein, erhält man

$$K\mathbf{v} - \omega^2 M\mathbf{v} = 0 \tag{6.15}$$

Gleichung (6.15) ist ein System von  $s$  linearen, homogenen Gleichungen für  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_s)$ . Es ist nur dann mit  $\mathbf{v} \neq 0$  lösbar, wenn die Determinante verschwindet:

$$\det |K - \omega^2 M| = 0 \tag{6.16}$$

Diese sogenannte Säkulargleichung (6.16) liefert ein Polynom  $s$ -ten Grades in  $\omega^2$ . Es gibt daher  $s$  verschiedene  $\omega_\alpha^2$ , die Nullstellen dieses Polynoms sind und die Säkulargleichung lösen. Man bezeichnet diese  $\omega_\alpha^2$  als *Eigenfrequenzen* des Systems. Eingesetzt in (6.15) ergeben sich daraus die dazu gehörenden Eigenvektoren  $\mathbf{v}_\alpha$ . Diese Eigenvektoren und -frequenzen sind jedoch *nicht* identisch mit denen, die an in der Linearen Algebra kennenlernt. Dort tritt statt der Matrix  $M$  die Einheitsmatrix  $E$  auf.

<sup>4</sup>Die zweiten partiellen Ableitungen müssen auch noch stetig sein, aber wir beschäftigen uns zum Glück nur mit netten Funktionen, für die das eh gilt.

**Beispiel 1: Zwei gekoppelte Oszillatoren**

Wir wollen nun unser Beispiel fortsetzen und die Eigenfrequenzen bestimmen. Dazu setzen wir die Säkulargleichung (6.16) an:

$$\det \begin{vmatrix} k + k_{12} - m\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Sie führt uns auf ein Polynom 2. Grades in  $\omega^2$

$$m^2\omega^4 - 2m(k + k_{12})\omega^2 + 2kk_{12} + k^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k}{m} \\ \omega_2^2 &= \frac{k + 2k_{12}}{m} \end{aligned}$$

Fortsetzung folgt...

Man<sup>5</sup> kann zeigen:

- Da  $K, M$  symmetrische Matrizen sind, sind alle Eigenfrequenzen  $\omega_\alpha$  reell.
- Falls  $\mathbf{aKa} > 0$  für  $\mathbf{a} \neq 0$  gilt, so folgt  $\omega_\alpha^2 > 0$  für  $\alpha = 1, \dots, s$ . Wegen (6.4) sind also die  $\omega_\alpha$  genau dann reell, wenn  $V$  ein Minimum besitzt. Wegen  $\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{v}_\alpha e^{i\omega t}$  bleibt genau dann  $\boldsymbol{\xi}$  beschränkt. Minima von  $V(\mathbf{q})$  entsprechen also stabilen Gleichgewichtslagen.
- Die Eigenvektoren  $\mathbf{v}_\alpha$  können reell gewählt werden.
- Die reellen Eigenvektoren sind linear unabhängig und bilden eine Basis im  $s$ -dimensionalen Ortsraum<sup>6</sup> (Eigenraum).

Da die Vektoren  $\mathbf{v}_\alpha$  zwar in ihrer Richtung, nicht aber in ihrem Betrag festgelegt sind, normiert man sie derart, daß

$$\mathbf{v}^\alpha \mathbf{M} \mathbf{v}^\alpha = 1 \quad (6.17)$$

gilt<sup>7</sup>. Damit gilt im allgemeinen:

$$\mathbf{v}^\alpha \mathbf{M} \mathbf{v}^\beta = \delta_{\alpha\beta}. \quad (6.18)$$

Diese Eigenschaft der Eigenvektoren heißt *verallgemeinerte Orthogonalität*. Sie sei kurz vorgerechnet:

Ersetzt man in (6.15)  $\mathbf{v}$  durch  $\mathbf{v}^\alpha$  und multipliziert mit  $\mathbf{v}^\beta$ , erhält man

$$\mathbf{v}^\beta \mathbf{K} \mathbf{v}^\alpha = \omega_\alpha^2 \mathbf{v}^\beta \mathbf{M} \mathbf{v}^\alpha \quad (6.19)$$

Man kann natürlich genauso gut  $\mathbf{v}_\beta$  einsetzen und dann mit  $\mathbf{v}^\alpha$  multiplizieren:

$$\mathbf{v}^\alpha \mathbf{K} \mathbf{v}^\beta = \omega_\beta^2 \mathbf{v}^\alpha \mathbf{M} \mathbf{v}^\beta \quad (6.20)$$

<sup>5</sup>Siehe zum Beispiel Landau-Lifschitz, Mechanik, §23.

<sup>6</sup>Das werden wir gleich beweisen.

<sup>7</sup>Physiker schenken sich manchmal die Transponiert-Zeichen. Eigentlich sollte diese Gleichung

$$(\mathbf{v}^\alpha)^T \mathbf{M} \mathbf{v}^\alpha = 1$$

lauten. Als Eselsbrücke mag dienen, daß Vektoren, die *vor* einer Matrix stehen, transponiert sind.

Da  $K$  symmetrisch ist, gilt

$$\mathbf{v}^\beta K \mathbf{v}^\alpha = \sum_{i,j=1}^s K_{ij} v_i^\beta v_j^\alpha = \sum_{i,j=1}^s K_{ji} v_j^\alpha v_i^\beta = \mathbf{v}^\alpha K \mathbf{v}^\beta$$

$M$  ist auch symmetrisch, also gilt ebenfalls:

$$\mathbf{v}^\beta M \mathbf{v}^\alpha = \mathbf{v}^\alpha M \mathbf{v}^\beta$$

Das kann man in (6.19) einsetzen

$$\mathbf{v}^\alpha K \mathbf{v}^\beta = \omega_\alpha^2 \mathbf{v}^\alpha M \mathbf{v}^\beta \quad (6.21)$$

Und nun subtrahieren wir (6.20) von (6.21):

$$0 = (\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2) \mathbf{v}^\alpha M \mathbf{v}^\beta$$

Ist nun  $\alpha \neq \beta$ , so ist meistens auch  $\omega_\alpha \neq \omega_\beta$ . Wir dürfen dividieren und erhalten  $\mathbf{v}^\alpha M \mathbf{v}^\beta = 0$ . Damit ist (6.18) bewiesen<sup>8</sup>. Denn  $\mathbf{v}^\alpha M \mathbf{v}^\alpha = 1$  hatten wir ja schon durch Normieren erreicht.

Nun kann man zeigen, daß die  $\mathbf{v}^\alpha$  linear unabhängig sind, denn aus

$$\sum_{\alpha=1}^s k_\alpha \mathbf{v}^\alpha = 0$$

folgt durch Multiplikation von rechts mit  $M \mathbf{v}^\beta$  sofort

$$k_\beta = 0.$$

Wir haben also  $s$  linear unabhängige Vektoren in einem  $s$ -dimensionalen Vektorraum, also bilden die  $\mathbf{v}^\alpha$  eine Basis des Ortsraums.

### Beispiel 1: Zwei gekoppelte Oszillatoren

Bestimmen wir nun die Eigenvektoren unseres Systems. Wir müssen dazu nur die Eigenfrequenzen  $\omega_1^2$  und  $\omega_2^2$  in (6.17) einsetzen, also für  $\omega_1^2$ :

$$\begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} - \frac{k}{m} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{aligned} (k + k_{12})v_1^1 - k_{12}v_2^1 - kv_1^1 &= 0 \\ -k_{12}v_1^1 + (k + k_{12})v_2^1 - kv_2^1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{hieraus folgt} \quad v_1^1 = v_2^1$$

Die Richtung von  $\mathbf{v}^1$  liegt nun fest, wir müssen ihn nur noch nach (6.17) normieren. Wegen

$$\mathbf{v}^1 M \mathbf{v}^1 = (v_1^1 \ v_1^1) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^1 \end{pmatrix} = 2m (v_1^1)^2$$

erhalten wir:

$$\mathbf{v}^1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<sup>8</sup>Sind die beiden Eigenfrequenzen gleich (man spricht dann von *Entartung*), so sind die Richtungen der dazugehörigen Eigenvektoren nicht eindeutig festgelegt. Diese kann man dann so wählen, daß  $\mathbf{v}^\alpha M \mathbf{v}^\beta = 0$  gilt.

Für  $\omega_2^2$  erhalten wir analog  $v_1^2 = -v_2^2$  und damit

$$\mathbf{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hat man nun die Eigenfrequenz  $\omega_\alpha$  und den dazu gehörigen Eigenvektor  $\mathbf{v}^\alpha$  bestimmt, ergibt sich nach (6.14) die Eigenschwingung

$$\boldsymbol{\xi}_\alpha(t) = \mathbf{v}^\alpha e^{i\omega_\alpha t}$$

Unsere Lösungen für  $\omega_\alpha$  hatten stets die Form  $\omega_\alpha^2 = \dots$ . Also ist auch  $-\omega_\alpha$  eine Lösung<sup>9</sup>. Wir haben also  $2s$  linear unabhängige Lösungen unserer Gleichung gefunden. Da der Lösungsraum eines linearen,  $s$ -dimensionalen Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung die Dimension  $2s$  hat, haben wir damit die allgemeine Lösung gefunden:

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \sum_{\alpha=1}^s \underbrace{(A_\alpha e^{i\omega_\alpha t} + B_\alpha e^{-i\omega_\alpha t})}_{\eta_\alpha(t)} \mathbf{v}^\alpha \quad (6.22)$$

Diese allgemeine Lösung erfüllt beliebige Anfangsbedingungen, da die  $\mathbf{v}^\alpha$ 's eine orthonormale Basis im Konfigurationsraum darstellen.  $\eta_\alpha(t)$  bezeichnet man als Normalkoordinaten, da sie sich auf den von den Eigenvektoren aufgespannten Eigenraum beziehen.

Übrigens sollte man in (6.22) die Konstanten so bestimmen, daß  $\boldsymbol{\xi}(t)$  reell wird. Oder man nimmt einfach den Realteil. Wer dieses Rumgschiebe von  $e$ -Funktionen und Realteilen nicht mag, kann natürlich auch gleich den reellen Ansatz verwenden:

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \sum_{\alpha=1}^s \left( \tilde{A}_\alpha \sin \omega_\alpha t + \tilde{B}_\alpha \cos \omega_\alpha t \right) \mathbf{v}^\alpha \quad (6.23)$$

Damit man ein wenig Land sieht: In der Praxis bestimmt man einfach die  $\omega^\alpha$  aus er Säkulargleichung (6.16), rechnet sich die dazugehörigen  $\mathbf{v}^\alpha$  aus (Normieren nicht vergessen), und setzt die Lösung als Linearkombination dieser Vektoren an.

### 6.2.1 Lagrange-Funktion in Eigenkoordinaten

Jetzt vergessen wir mal für einen Moment, daß wir die allgemeine Lösung von (6.10) bereits kennen, und leiten uns die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichungen in Normalkoordinaten her. Dabei werden wir dann sehen, was wir eigentlich durch diese Normalkoordinaten gewonnen haben. Schreiben wir also vorige Gleichung nochmals in Kurzform:

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(t) \mathbf{v}^\alpha \quad (6.24)$$

Wir definieren nun eine Matrix  $\mathbf{V}$ , die die Eigenvektoren  $\mathbf{v}^\alpha$  als Spalten enthält, also  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^s)$ , und  $\boldsymbol{\eta}$  als Spaltenvektor mit den  $\eta_\alpha$ 's als Komponenten. Dann geht die Summe in (6.24) in eine Matrixmultiplikation über:

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{V}\boldsymbol{\eta}(t) \quad (6.25)$$

Da die  $\mathbf{v}^\alpha$  linear unabhängig sind, ist  $\mathbf{V}$  invertierbar. Wir erhalten somit eine lineare, bijektive Abbildung  $\boldsymbol{\eta} \leftrightarrow \boldsymbol{\xi} = \mathbf{V}\boldsymbol{\eta}$ , also (auf physikalisch) eine Koordinatentransformation.

<sup>9</sup>Eine andere Sichtweise ist diese: Die Bewegungsgleichung enthält nur reelle Koeffizienten. Dann ist mit jeder komplexen Lösung  $e^{i\omega t}$  auch die dazu konjugiert komplexe  $e^{-i\omega t}$  eine Lösung.

Die transformierte Lagrange-Funktion erhalten wir, indem wir (6.24) in Gleichung (6.8) einsetzen:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha} \mathbf{v}^{\alpha} \right) \mathbf{M} \left( \sum_{\beta=1}^s \eta_{\beta} \mathbf{v}^{\beta} \right) - \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha} \mathbf{v}^{\alpha} \right) \mathbf{K} \left( \sum_{\beta=1}^s \eta_{\beta} \mathbf{v}^{\beta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s \dot{\eta}_{\alpha} \dot{\eta}_{\beta} \mathbf{v}^{\alpha} \mathbf{M} \mathbf{v}^{\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s \eta_{\alpha} \eta_{\beta} \mathbf{v}^{\alpha} \mathbf{K} \mathbf{v}^{\beta} \end{aligned}$$

Mit  $\mathbf{v}^{\alpha} \mathbf{M} \mathbf{v}^{\beta} = \delta_{\alpha\beta}$  und  $\mathbf{K} \mathbf{v}^{\beta} = \omega_{\beta}^2 \mathbf{M} \mathbf{v}^{\beta}$  (Gleichung (6.19)) folgt weiter

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s \dot{\eta}_{\alpha} \dot{\eta}_{\beta} \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s \omega_{\beta}^2 \eta_{\alpha} \eta_{\beta} \mathbf{v}^{\alpha} \mathbf{M} \mathbf{v}^{\beta} \\ L &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \dot{\eta}_{\alpha}^2 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \omega_{\alpha}^2 \eta_{\alpha}^2 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Die neue Lagrange-Funktion hat wieder die Form von (6.8), wobei die Matrizen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{K}$  jetzt jedoch diagonal sind.

Die Lagrange-Gleichungen lauten nun

$$\ddot{\eta}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 \eta_{\alpha} = 0 \quad \text{für } \alpha = 1, \dots, s \quad (6.27)$$

Bei Verwendung von Normalkoordinaten entkoppeln also die Bewegungsgleichungen.

Die Bewegungsgleichungen kann man auch ohne den (Um-)Weg über die Lagrange-Funktion gewinnen: Wir kennen bereits die allgemeine Lösung (6.22) der Differentialgleichung (6.10). Wenn wir sie einsetzen und (6.19) verwenden, erhalten wir

$$\sum_{\alpha=1}^s \ddot{\eta}_{\alpha} \mathbf{M} \mathbf{v}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \omega_{\alpha}^2 \eta_{\alpha} \mathbf{M} \mathbf{v}^{\alpha} = 0,$$

also

$$\mathbf{M} \left\{ \sum_{\alpha=1}^s (\ddot{\eta}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 \eta_{\alpha}) \mathbf{v}^{\alpha} \right\} = 0.$$

$\mathbf{M}$  hat maximalen Rang<sup>10</sup>; also muß die geschweifte Klammer verschwinden. Da die  $\mathbf{v}_{\alpha}$  linear unabhängig sind<sup>11</sup>, folgt sofort Gleichung (6.27).

### Beispiel 1: Zwei gekoppelte Oszillatoren

Wir haben bereits  $\mathbf{v}^1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  mit den zugehörigen Eigenfrequenzen  $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$  und  $\omega_2^2 = \frac{k+2k_{12}}{m}$  bestimmt.

Wir können nun die allgemeine Lösung hinschreiben:

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \left( A e^{i\omega_1 t} + B e^{-i\omega_1 t} \right) \mathbf{v}^1 + \left( C e^{i\omega_2 t} + D e^{-i\omega_2 t} \right) \mathbf{v}^2$$

<sup>10</sup>Das folgt z.B. aus der positiven Definitheit von  $\mathbf{M}$ .

<sup>11</sup>Hier geht dann  $\mathbf{v}^{\alpha} \mathbf{M} \mathbf{v}^{\beta} = \delta_{\alpha\beta}$  ein; man braucht also auch hier die Orthonormalität.

Diese ist jedoch unpraktisch. Es ist geschickter, die Normalkoordinaten zu verwenden. Mit der Variablentransformation

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}(t) &= \eta_1(t)\mathbf{v}^1 + \eta_2(t)\mathbf{v}^2, \\ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= \frac{\eta_1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\eta_2}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (6.28)$$

wird die Lagrange-Funktion in Normalkoordinaten nach (6.26) zu

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\eta_1^2 + \frac{k + 2k_{12}}{m}\eta_2^2\right),$$

die Lagrange-Gleichungen lauten nun

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_1 + \frac{k}{m}\eta_1 &= 0 \\ \ddot{\eta}_2 + \frac{k + 2k_{12}}{m}\eta_2 &= 0.\end{aligned}\quad (6.29)$$

Wir berechnen noch die Lösung für die Anfangsbedingungen

$$\xi_1(0) = 0, \quad \xi_2(0) = a, \quad \dot{\xi}_1(0) = 0, \quad \dot{\xi}_2(0) = 0.$$

Das geht am schnellsten, wenn wir die Normalkoordinaten ausnützen. Umkehren von (6.28) liefert

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_1 - \xi_2 \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{pmatrix} \eta_1(0) \\ \eta_2(0) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\eta}_1(0) \\ \dot{\eta}_2(0) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung von (6.29) mit diesen Anfangsbedingungen lautet

$$\eta_1(t) = a\sqrt{\frac{m}{2}} \cos \omega_1 t, \quad \eta_2(t) = -a\sqrt{\frac{m}{2}} \cos \omega_2 t.$$

Das setzen wir wieder in (6.28) ein und führen gleich noch  $A = 2a\sqrt{\frac{m}{2}}$  ein:

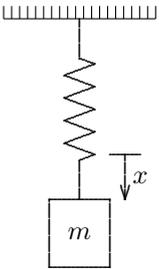
$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{A}{2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = A \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \\ \xi_2 &= \frac{A}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\end{aligned}$$

Für  $\omega_1 \approx \omega_2$ , d.h.  $k_{12} \ll k$ , schwingen die Oszillatoren mit der mittleren Frequenz  $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$  und mit einer sich sehr langsam ändernden Amplitude  $A \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$  bzw.  $A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$ . Dieses An- und Abschwellen der Amplitude, das durch Schwingungsüberlagerung zustandekommt, nennt man *Schwebung*.

Diese hängt natürlich von unseren Anfangsbedingungen ab: Zuerst ist Masse 2 ausgelenkt und Masse 1 ruht. Wir lassen los - Masse 2 schwingt. Durch die Feder  $k_{12}$  wird nun langsam die Schwingungsenergie auf Masse 1 übertragen, bis schließlich Masse 2 ruht und nur noch Masse 1 schwingt. Nun wird die Energie wieder auf Masse 2 übertragen und so fort und so fort.

## 6.3 Einfache Schwingungen

### 6.3.1 Harmonischer Oszillator



Die Grundeigenschaft eines harmonischen Oszillators ist die Proportionalität zwischen Kraft und Auslenkung. Meist wird er durch eine Masse  $m$  an einer Feder mit der Federkonstanten  $k$  veranschaulicht, die in einer Richtung schwingen kann. Sei  $q$  die generalisierte Koordinate,  $q_0$  die Ruhelage und  $x$  die Auslenkung aus der Ruhelage ( $x = q - q_0$ ).

Wir haben

$$m\ddot{q} = F(q) = -k(q - q_0)$$

Das ist mit der Variablen  $x$  gleichbedeutend zu

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad (6.30)$$

Die allg. Lösung dieser Gleichung kann man auf verschiedene Art darstellen:

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} = C \sin(\omega t + \varphi)$$

$a, b, A, B, C, \varphi$  sind die Integrationskonstanten. Das Bequemste für uns ist die erste Möglichkeit. Wählen wir  $a$  und  $b$  so, daß für  $t = 0$  die Anfangsbedingungen  $x(0) = a$  und  $\dot{x}(0) = \omega b$  erfüllt sind, so haben wir

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (6.31)$$

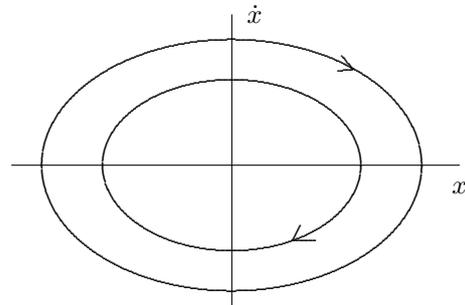
Aus (6.30) folgt durch Multiplikation mit  $2\dot{x}$ :

$$\begin{aligned} 2\dot{x}\ddot{x} + 2\omega^2 \dot{x}x &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) &= 0 \\ \Rightarrow \dot{x}^2 + \omega^2 x^2 &= \text{const.} \end{aligned}$$

Dies ist eine Ellipsengleichung. Die Konstante *const.* ergibt sich aus den Anfangsbedingungen. Setzen wir  $x$  und  $\dot{x}$  aus Gleichung (6.31) ein, erhalten wir:

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = (-a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t)^2 + \omega^2 (a \cos \omega t + b \sin \omega t)^2 = \omega^2 (a^2 + b^2) \quad (6.32)$$

Im sog. Phasenraum beschreibt das Pendel also Ellipsen. Das System hat an den Punkten im Phasenraum, wo die Ellipse die  $x$ -Achse schneidet, nur potentielle Energie (Umkehrpunkte der Masse) und in den Schnittpunkten mit der  $\dot{x}$ -Achse nur kinetische Energie (Nulldurchgang).

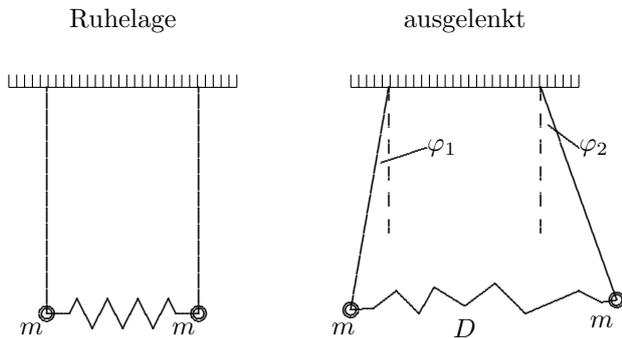


Die Gesamtenergie ist

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m \left( \dot{x}^2 + \frac{k}{m}x^2 \right) = \frac{1}{2}m \frac{k}{m} (a^2 + b^2) = \frac{1}{2}k(a^2 + b^2)$$

Hierbei wurde (6.32) und  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  benutzt.

### 6.3.2 Gekoppelte Pendel



Wir betrachten nun zwei mathematische Pendel der Länge  $l$ , deren Massen durch eine Feder der Federkonstanten  $D$  verbunden sind. Der Abstand der beiden Aufhängepunkte soll mit der Ruhelänge der Feder identisch sein. Als generalisierte Koordinaten eignen sich die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ .

Wir betrachten kleine Auslenkungen aus der Ruhelage, so daß wir nähern können:

$$l(1 - \cos \varphi) \approx l\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\varphi^2\right) = \frac{1}{2}l\varphi^2$$

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

Ab jetzt gehts nach Kochrezept: Lagrangegleichung,  $K$  und  $M$  bestimmen, Eigenfrequenzen  $\omega^2$ , Eigenvektoren  $V_\alpha$ , Normalkoordinaten,

Für  $T$ ,  $V$  und  $L$  ergibt sich so

$$T = \frac{m}{2}l^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)$$

$$V = \underbrace{\frac{m}{2}gl(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)}_{\text{Gravitationspotential}} + \underbrace{\frac{D}{2}l^2(\varphi_1 - \varphi_2)^2}_{\text{Federpotential}}$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2}l^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{m}{2}gl(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{D}{2}l^2(\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

Aus  $L$  ergeben sich folgende Lagrangesche Gleichungen 2. Art:

$$m\ddot{\varphi}_1 + \frac{mg}{l}\varphi_1 + D(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

$$m\ddot{\varphi}_2 + \frac{mg}{l}\varphi_2 + D(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

$M$  und  $K$  ergeben sich wiederum aus (6.7) und (6.4):

$$M = \begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} mgl + Dl^2 & -Dl^2 \\ -Dl^2 & mgl + Dl^2 \end{pmatrix}$$

Nun können wir mit Hilfe der Säkulargleichung (6.16) die Eigenfrequenzen bestimmen:

$$\begin{vmatrix} mgl + Dl^2 - ml^2\omega^2 & -Dl^2 \\ -Dl^2 & mgl + Dl^2 - ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^4 - 2\omega^2 \left(\frac{g}{l} + \frac{D}{m}\right) + \left(\frac{g}{l} + \frac{D}{m}\right)^2 - \frac{D^2}{m^2} = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l} + \frac{D}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{l} + \frac{D}{m}\right)^2 - \left(\frac{g}{l} + \frac{D}{m}\right)^2 + \frac{D^2}{m^2}}$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{D}{m}$$

Die entsprechenden Eigenvektoren  $\mathbf{v}_\alpha$  und Normalkoordinaten  $\eta_\alpha$  sind:

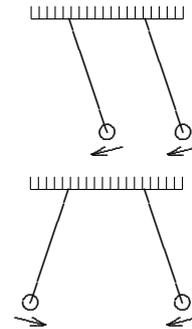
$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2ml}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} l (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2ml}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{m}{2}} l (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Eigenschwingungen:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\pm i\omega_1 t} \quad \text{Die Pendel schwingen gleichsinnig.}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{\pm i\omega_1 t} \quad \text{Die Pendel schwingen gegensinnig.}$$



Die Vorfaktoren von  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  kann man in den Integrationskonstanten verstecken - es bleiben also nur die Vorzeichen übrig. Nach (6.23) folgt daraus die allgemeine Lösung:

$$\varphi_1 = A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t$$

$$\varphi_2 = A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t - A_2 \sin \omega_2 t - B_2 \cos \omega_2 t$$

Die Bewegungsgleichungen in Normalkoordinaten lauten:

$$\ddot{\eta}_1 + \frac{g}{l} \eta_1 = 0$$

$$\ddot{\eta}_2 + \eta_2 \left( \frac{g}{l} + 2 \frac{D}{m} \right) = 0$$

### 6.3.3 Lissajous-Figuren

Lissajous-Figuren entstehen durch Überlagerung zweier voneinander unabhängiger harmonischer Schwingungen, die im rechten Winkel zueinander stehen:

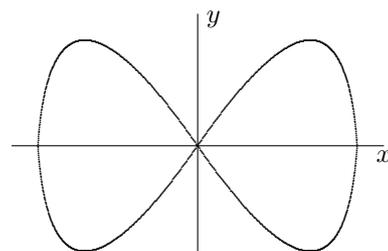
$$\ddot{x} + \omega_x^2 x = 0 \quad \text{also} \quad x = A \sin(\omega_x t + \varphi_x)$$

$$\ddot{y} + \omega_y^2 y = 0 \quad y = B \sin(\omega_y t + \varphi_y)$$

Die Bahnkurven sind geschlossen, falls  $\omega_x$  und  $\omega_y$  kommensurabel sind, d.h.  $\frac{\omega_x}{\omega_y} \in \mathbb{Q}$ . Denn dann gibt es ganze Zahlen  $n$  und  $k$ , so daß  $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n}{k}$  und nach  $\text{kgV}(n, k)$  Perioden wiederholt sich das Muster.

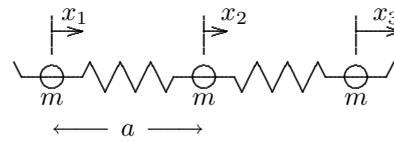
Sonst erhält man nichtgeschlossene Bahnen, welche nach und nach das gesamte Quadrat  $[-A, A] \times [-B, B]$  ausfüllen.

Für  $\omega_y = 2\omega_x$  und  $\varphi_x = \varphi_y = 0$  ergibt sich nebenstehendes Bildchen.



## 6.4 Lineare periodische Kette

Jetzt wird's mal so richtig physikalisch. Wir wollen einen Festkörper in einer Dimension betrachten. Ein Modell dafür ist in der Abbildung rechts aufgezeichnet. Die Atome haben den Abstand  $a$  und sind durch harmonische Kräfte an ihre Ruhelage gebunden.



Hm, ziemlich viele Freiheitsgrade. Das Problem lautet: Man verschaffe sich Lösungen - egal wie.

Eine Methode ist, zusätzliche Anforderungen zu stellen. Das werden wir jetzt auch tun. Dabei behalten wir im Hinterkopf, daß wir hauptsächlich an Schwingungen interessiert sind.

Als erstes wollen wir annehmen, daß unsere Kette periodisch ist, das heißt, für  $N \in \mathbb{N}$  gilt

$$x_{N+i} = x_i \quad (6.33)$$

Irgendwelche Schwingungen, die durch unsere Kette laufen, sollten dieser Forderung genügen. Übrigens ist das auch ein Modell für ein Ringmolekül. Dann ist das  $N+i$ -te Atom mit dem  $i$ -ten *identisch*. Jetzt haben wir wenigstens eine endliche Anzahl an Freiheitsgraden und können für einen Abschnitt der Kette aus  $N$  Massenpunkten die kinetische und potentielle Energie hinschreiben:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m \dot{x}_l^2$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{l,j=1}^N K_{lj} x_l x_j$$

Das Potential ist hier noch das allgemeine, in dem jedes Atom mit jedem anderen wechselwirkt. Damit erhalten wir folgende Lagrange-Gleichungen:

$$m \ddot{x}_l + \sum_j K_{lj} x_j = 0$$

Das ist natürlich seehrr allgemein, also zurück zu unserer Federkette. Für sie erhalten wir aus Newton

$$m \ddot{x}_l = -k(x_l - x_{l+1}) - k(x_l - x_{l-1})$$

bzw.

$$m \ddot{x}_l - k(x_{l-1} - 2x_l + x_{l+1}) = 0 \quad \text{für } l = 1, \dots, N \quad (6.34)$$

(Man beachte  $x_0 = x_N$  und  $x_{N+1} = x_1$ ). Also ist die Kräftematrix (Nullen wurden nicht geschrieben):

$$K = \begin{pmatrix} 2k & -k & & & -k \\ -k & 2k & -k & & \\ & -k & 2k & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -k \\ -k & & & -k & 2k & -k \\ & -k & & & -k & 2k \end{pmatrix}$$

Als nächstes wollen wir annehmen, daß jedes Atom die gleiche Bewegung durchführt, sich also nur durch einen Phasenfaktor von seinen Nachbaratomen unterscheidet. Und da alle Atome gleichberechtigt sind, muß dieser Phasenfaktor  $\chi$  stets derselbe sein. In Formeln:

$$x_l = x_{l-1}e^{i\chi} \quad (6.35)$$

Ach ja, noch was: Die Bewegung soll natürlich eine Schwingung sein:

$$x_l = A_l e^{i\omega t} \quad (6.36)$$

Aus der Homogenität (6.35) folgt sofort

$$A_l = A_{l-1}e^{i\chi}.$$

Aus der Periodizität  $x_l = x_{l+N}$  kann man  $\chi$  bestimmen:

$$\begin{aligned} A_l &\stackrel{!}{=} A_{l+N} = A_l e^{iN\chi} \\ \Rightarrow e^{iN\chi} &= 1 \quad \Rightarrow \quad N\chi = 2\pi n \quad \Rightarrow \quad \chi = 2\pi \frac{n}{N} \quad \text{mit } n = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Das setzen wir jetzt in unsere Bewegungsgleichung (6.34) ein und hoffen, daß wir trotz der vielen Einschränkungen noch eine Lösung finden:

$$-\omega^2 A_l - \frac{k}{m} (A_l e^{-i\chi} - 2A_l + A_l e^{i\chi}) = 0$$

es sei mal wieder  $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \dots$

$$\omega^2 + \omega_0^2 (e^{-i\chi} + e^{i\chi} - 2) = 0$$

Mit der Eulerschen Formel  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  wird daraus

$$\omega^2 + \omega_0^2 (2 \cos \chi - 2) = 0$$

und mit  $\cos \chi - 1 = 2 \sin^2 \frac{\chi}{2}$  also

$$\omega^2 - 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\chi}{2} = 0$$

Da  $\chi = 2\pi \frac{n}{N}$  erhalten wir also Schwingungen der Frequenz

$$\omega = 2\omega_0 \left| \sin \frac{n\pi}{N} \right| \quad N = 1, \dots, n$$

Wie man sieht ist  $\omega_N = 0$ . Dann ist  $e^{i2\pi N/N} = 1$ , alle Atome bewegen sich also stets in die gleiche Richtung - dies entspricht einer Translation.

Da  $e^{i\chi \frac{N}{n}} = e^{i2\pi} = 1$  liegt nicht nur die anfangs geforderte Periode über  $N$  Atome vor, sondern es existieren auch kleinere Perioden. Die kürzeste eben mit der Länge  $N/n$  Atome bzw. mit der Wellenlänge

$$\lambda = a \frac{N}{n} = \frac{L}{n}$$

Jetzt kommen einige Bezeichnungen, die in späteren Physik-Vorlesungen noch häufiger auftauchen werden. Die zugehörige Wellenzahl ist

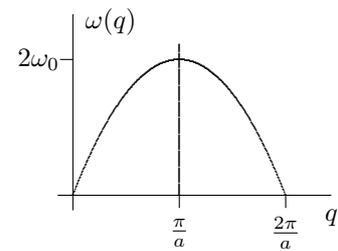
$$q = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Dispersionsrelation nennt man die Funktion

$$\omega(q) = 2\omega_0 \left| \sin \frac{qa}{2} \right|$$

Die Phasengeschwindigkeit ist

$$c = \frac{\omega}{q} = 2\omega_0 \sin \left| \frac{qa}{2} \right|$$



Also für kleine  $q$ :  $c \approx \omega_0 a$ . Das ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Schwingungen längs der Kette fortpflanzen. Sie heißt gewöhnlich *Schallgeschwindigkeit*.

## 6.5 Der gedämpfte harmonische Oszillator

Der gedämpfte Oszillator wird sowohl in der Einführung Theo als auch in der Ex-Physik besprochen. Wir wollen hier nur einige Stichpunkte aufführen.

Makroskopisch: Dissipation infolge von Reibung. Mechanische Energie nimmt ab. *Häufig*: Reibungskraft  $\mathbf{K}_R = -b\mathbf{v}$ . Damit erhalten wir nach Newton II

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \quad (6.37)$$

Die Energie nimmt aufgrund der Reibungskraft  $-b\mathbf{v}$  ab. Während einer kurzen Zeit  $dt$  gilt  $E = F \cdot s$ :

$$dE = -b\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dt$$

also

$$\frac{dE}{dt} = -b\mathbf{v}^2 = -b\dot{x}^2.$$

Diese Überlegung hat nichts mit der Gleichung (6.37) zu tun. Allerdings sollte aus (6.37) dieselbe Beziehung folgen. Let's see... Multiplikation von (6.37) mit  $\dot{x}$  liefert

$$\begin{aligned} m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} &= -b\dot{x}^2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 \right) &= -b\dot{x}^2 \end{aligned}$$

Links steht die Energie. qed.

(6.37) läßt sich auch so schreiben:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

wobei  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  die Eigenfrequenz des Systems ohne Dämpfung ist und  $\beta = \frac{b}{2m}$  ist.

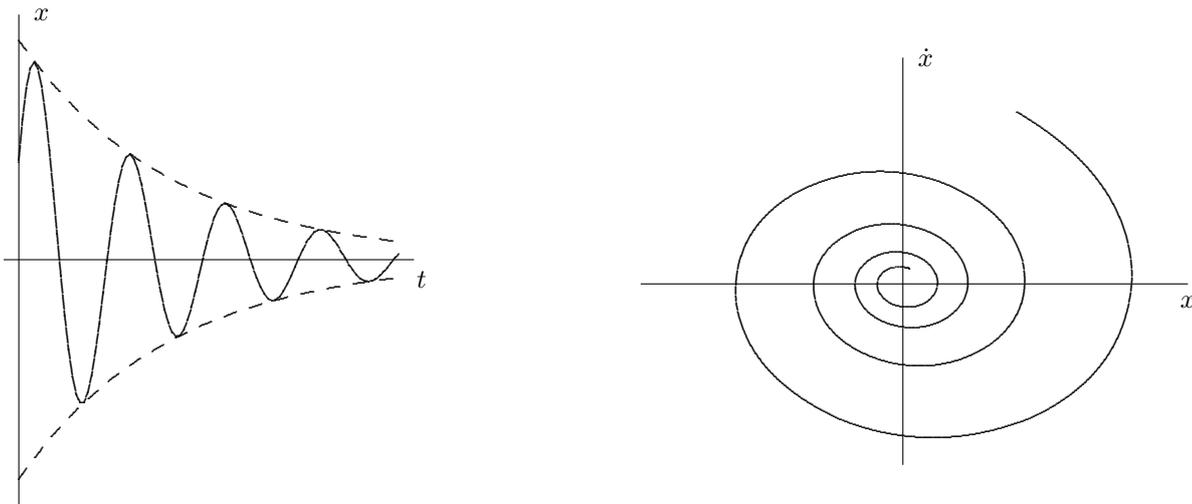
Aus dem Ansatz  $x = Ae^{\lambda t}$  folgt

$$\lambda_{1/2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

### 6.5.1 Fall der schwachen Dämpfung: $\omega_0^2 > \beta^2$

Die  $\lambda$ 's sind gemischt komplex, wir erhalten als allg. Lösung die Linearkombination

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\beta t} \left( A \sin \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + B \cos \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t \right) \\ &= C e^{-\beta t} \sin \left( \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi \right) \end{aligned} \quad (6.38)$$



### 6.5.2 Aperiodischer Grenzfall: $\omega_0 = \beta$

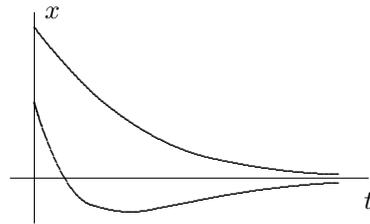
Wir haben eine doppelte Nullstelle  $\lambda_1 = \lambda_2$ , die Differentialgleichung ist *entartet*. Die allgemeine Lösung lautet nun

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}$$

Diese Gleichung erhält man übrigens auch aus (6.38) durch den Grenzübergang  $\omega_0 \rightarrow \beta$ .

Beim aperiodischen Grenzfall klingt die Schwingung schneller ab als bei den anderen Fällen. Das nützt man z.B. bei Galvanometern aus.

Je nach Anfangsbedingungen gibt es überhaupt keinen oder nur einen Nulldurchgang. Diese beiden Fälle sind in die Grafik eingezeichnet.



### 6.5.3 Fall der starken Dämpfung (Kriechfall): $\beta^2 > \omega_0^2$

Zwei verschiedene, rein reelle  $\lambda$ 's. Lösung:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left( A e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

Es gibt höchstens einen Nulldurchgang.

## 6.6 Oszillator mit harmonischer äußerer Kraft

Nun versuchen wir uns an der Gleichung

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t.$$

Wir rechnen komplex und nehmen am Ende nur den Realteil der komplexen Lösung.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t} \quad (6.39)$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung besteht aus der allg. Lösung des homogenen Problems (die haben wir bereits im letzten Abschnitt hergeleitet) und *einer* speziellen Lösung des inhomogenen Problems. Diese verschaffen wir uns mit dem Ansatz

$$x^{(0)}(t) = Ae^{i\omega t}.$$

Setzen wir ihn in (6.39) ein, erhalten wir für  $A$

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta},$$

also

$$x^{(0)}(t) = \frac{f_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta}$$

Da die homogene Lösung abklingt, ist nach dem Einschwingvorgang nur noch die spezielle Lösung vorhanden. Um diese genauer zu untersuchen, schreiben wir  $A$  in Polarkoordinaten um. Wie man leicht nachrechnet, gilt<sup>12</sup>

$$A = |A|e^{i\delta} \quad \text{mit} \quad |A|^2 = \frac{f_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \quad \text{und} \quad \tan \delta = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Ergo:

$$x^{(0)} = |A|e^{i\omega t + \delta}$$

Die ursprüngliche Gleichung wird durch den Realteil hiervon gelöst, der da lautet

$$x(t) = f_0 |A| \cos(\omega t + \delta) = \frac{f_0 \cos(\omega t + \delta)}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}.$$

Für schwache Dämpfung  $\beta^2 \ll \omega^2$  gilt für  $\omega \approx \omega_0$  wegen  $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega_0(\omega - \omega_0)$  näherungsweise

$$|A|^2 = \frac{1}{4\omega_0^2} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \beta^2} \quad \tan \delta = \frac{\beta}{\omega - \omega_0}$$

Für  $\omega \approx \omega_0$  tritt Resonanz ein, ist obendrein  $\beta \rightarrow 0$ , haben wir eine Resonanzkatastrophe. Dann ist allerdings die Annahme der Linearität nicht mehr gerechtfertigt (irgendwann ist jede Feder am Ende). Außerdem dauert es dann unendlich lange, bis die homogene Lösung abgeklungen ist,

Für größere Dämpfung verschiebt sich das Maximum von  $A$ . Die Extrema von  $A$  finden wir durch Ableiten:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} |A|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\omega^3 - 2\omega(2\omega_0^2 - 4\beta^2) = 0$$

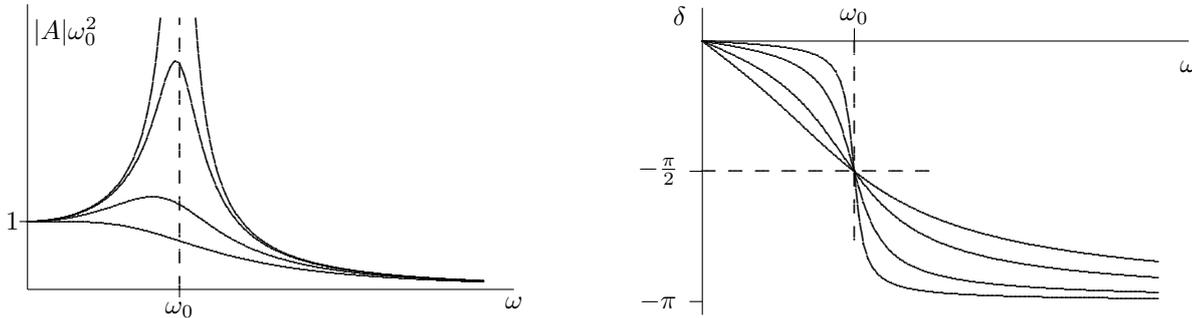
Da  $\omega \geq 0$  ist, erhalten wir folgende  $\omega$ 's:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0 \\ \omega_2 &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad \text{für} \quad \beta \leq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

<sup>12</sup>Wußtet Ihr schon:

$$\lim_{s \rightarrow 9} \sqrt{s} = 3$$

Für  $2\beta^2 > \omega_0^2$  fällt die zweite Lösung weg. Dann gibt es neben dem trivialen  $\omega = 0$  überhaupt kein Maximum mehr.



## 6.7 Nichtlineare Schwingungsgleichungen

Wie Ihr Euch vielleicht erinnert, haben wir ganz am Anfang dieses Kapitels das Potential Taylor-entwickelt und haben nach dem quadratischen Term abgebrochen. Nun wollen wir ein weiteres Glied der Reihenentwicklung berücksichtigen. Wir betrachten nun also eine Bewegung im Potential

$$V = \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{\beta}{4}x^4$$

mit der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0.$$

Der Störterm sei klein:  $\beta \ll 1$ .

Ungerade Terme in  $V$  (z.B.  $-\gamma x^3$ ) würden lediglich den Gleichgewichtspunkt verschieben, wir brauchen sie also nicht zu berücksichtigen.

### 6.7.1 Allgemeine Vorbemerkungen

- Die Gleichung ist exakt lösbar (Energiesatz und Trennung der Variablen), die Lösungen lassen sich aber nicht geschlossen angeben.
- Erwartung: Es existieren periodische Lösungen, Frequenz gegenüber  $\omega_0$  verschoben ( $\omega = \omega_0 + \beta\omega_1 + \beta^2\omega_2 + \dots$ )
- Einfache Entwicklungsverfahren versagen, denn es gilt z.B.  $\cos[(\omega_0 + \beta\omega_1)t] = \cos\omega_0 t \cos\beta\omega_1 t - \sin\beta\omega_1 t \sin\omega_0 t \approx \cos\omega_0 t - \beta\omega_1 t \sin\omega_0 t$ . Aber  $\beta\omega_1 t$  wird trotz kleinem  $\beta$  mit  $t$  beliebig groß.

Wir müssen uns also was anderes einfallen lassen. Zuerst wählen wir uns schöne Anfangsbedingungen:

$$x(0) = A \quad \dot{x}(0) = 0$$

Dann schreiben wir die Bewegungsgleichung um

$$\ddot{x} + \omega^2 x + (\omega_0^2 - \omega^2)x + \beta x^3 = 0,$$

setzen  $\omega = \omega_0 + \beta\omega_1$  ein und vernachlässigen die in  $\beta$  quadratischen Terme. Wir erhalten so

$$\ddot{x} + \omega^2 x - 2\omega_0\beta\omega_1 x + \beta x^3 = 0 \quad (6.40)$$

Jetzt verwenden wir den Ansatz

$$x(t) = x_0(t) + \beta x_1(t) + \dots$$

Diesen setzen wir in (6.40) ein. Dann führen wir einen Koeffizientenvergleich nach Potenzen von  $\beta$  durch.

Die Terme ohne  $\beta$  liefern

$$\ddot{x}_0(t) + \omega^2 x_0(t) = 0,$$

also

$$x_0(t) = A \cos \omega t.$$

Die Terme mit  $\beta$  liefern<sup>13</sup>

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 - 2\omega_0 \omega_1 x_0 + x_0^3 = 0$$

Hmm :)  $x_0$  kennen wir schon, wir können also damit  $x_1$  ausrechnen. Sortieren wir um und verwenden  $\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x$ :

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 2\omega_0 \omega_1 A \cos \omega t - \frac{A^3}{4} (\cos 3\omega t + 3 \cos \omega t) \quad (6.41)$$

Es darf in dieser Gleichung keine Resonanzkatastrophe geben, also müssen auf der rechten Seite die Terme mit  $\cos \omega t$  wegfallen, d.h.

$$2\omega_0 \omega_1 A - \frac{3A^3}{4} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{3}{8} \frac{A^2}{\omega_0}$$

Aus  $x_1(0) = 0$  und  $\dot{x}_1(0) = 0$  läßt sich nun  $x_1(t)$  ausrechnen. Das heißt, eine inhomogene Lösung von (6.41) finden und mit der allgemeinen homogenen Lösung die Anfangswerte anpassen. Das Resultat hiervon ist

$$x_1(t) = \frac{A^3}{32\omega^2} \cos \omega t - \frac{1}{8\omega^2} \frac{A^2}{4} \cos 3\omega t.$$

Es ist in dieser Rechnung häufig egal, ob man  $\omega$  oder  $\omega_0$  schreibt, die beiden unterscheiden sich ja nur in erster Ordnung. Allerdings ist es wichtig, daß in den Kosinus-Termen stets  $\omega$  steht -siehe Vorbemerkungen.

Hätten wir auch Terme mit  $\beta^2$  mitgeschleppt, so könnten wir jetzt noch den Term  $\beta^2 x_2(t)$  bestimmen. Und dann  $x_3$  und  $x_4$  und so weiter.

### 6.7.2 Physikalische Konsequenzen

- Es treten Oberschwingungen auf ( $\cos 3\omega t$ )
- Durch Terme ungerader Ordnung im Potential ( $x^3$ ) wird die mittlere Lage des schwingenden Etwas verschoben. Diese Verschiebung ist z.B. Ursache der Wärmeausdehnung von Körpern.
- Die Frequenzen werden größer.

### 6.7.3 Einfluß einer äußeren Kraft

Was passiert, wenn wir an unserem anharmonischen Oszillator zupfen? Unsere Schwingungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \omega t + \alpha x^3$$

Für  $\alpha = 0$  erhalten wir  $x = A \cos \omega t$  mit

$$|A| = \frac{f}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (6.42)$$

<sup>13</sup>nicht vergessen,  $x^3 = (x_0 + \beta x_1 + \dots)^3$  zu entwickeln.

Ist nun  $\omega$  weit weg von  $\omega_0$ , so ist die Amplitude klein, und wir können den anharmonischen Term  $\alpha x^3$  vergessen. Wir nehmen also an, es gäbe näherungsweise Resonanz, d.h.  $\omega = \omega_0 + \varepsilon$  mit  $\varepsilon \ll 1$ . Dann wird (6.42) zu

$$|A| = \frac{f}{2m\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \beta^2}}$$

Wir haben bereits hergeleitet, daß der anharmonische Term zu einer Verschiebung der Eigenfrequenz des Systems führt. Wir rechnen daher mit

$$\omega_{0,eff} = \omega_0 + \omega_2 A^2$$

Setzen wir das ein, erhalten wir

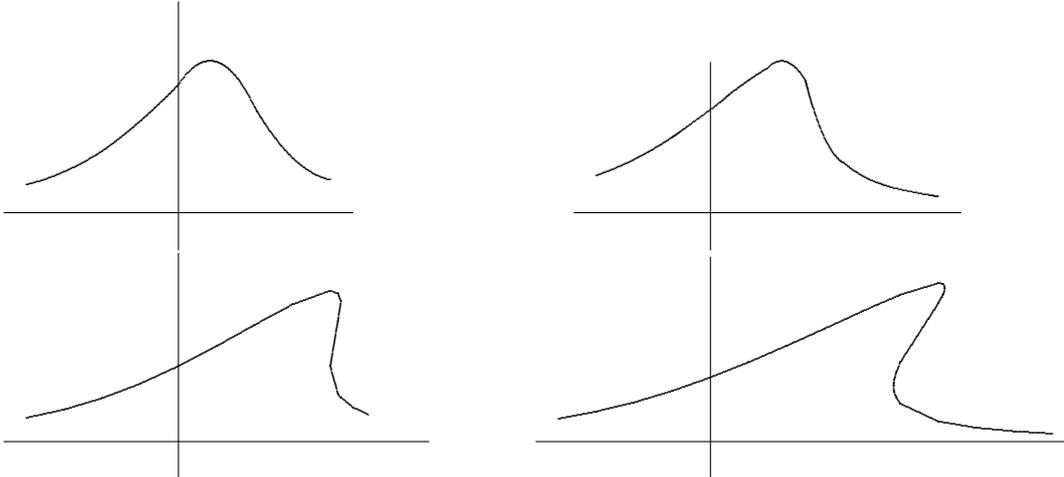
$$A = \frac{f}{2m\omega_0} \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon - A^2\omega_2)^2 + \beta^2}}$$

Diese Gleichung können wir -im Prinzip- nach  $A$  auflösen. Wir erhalten eine Gleichung dritten Grades in  $A^2$ :

$$A^2 \{(\varepsilon - A^2\omega_2)^2 + \beta^2\} = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}$$

Die reellen Lösungen  $A(\omega)$  dieser Gleichung beschreiben Gleichgewichtslagen des schwingenden anharmonischen Oszillators. Bei kleinen  $f$  ist auch  $A$  klein, wir erhalten fast dieselbe Amplitude-Frequenz-Kurve  $A(\omega)$  wie beim harmonischen Oszillator. Bei größerem  $f$  wird  $A$  immer größer, die Kurve verschiebt sich. Für hinreichend große  $f$  erhalten wir drei Lösungen für  $A$ . Das System kann mit kleiner Amplitude im  $x^2$  Potential des harmonischen Oszillators schwingen oder mit großer Amplitude im für große  $x$  sehr starken  $x^4$ -Potential. Dazwischen gibt's dann noch eine instabile Lösung, bei der sich das System nicht entscheiden kann, ob es seine Amplitude verkleinert ( $\rightarrow$  „ $x^2$ -Schwingung“) oder vergrößert ( $\rightarrow$  „ $x^4$ -Potential“).

Bei den untenstehenden Grafiken wurde für wachsende  $f$  die Amplitude gegen  $\varepsilon = \omega - \omega_0$  aufgetragen.



# 7 Mechanik des starren Körpers

## Inhalt

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>7.1 Erhaltungsgrößen und Kinematik . . . . .</b>                 | <b>81</b> |
| 7.1.1 Definitionen und Koordinatensysteme . . . . .                 | 81        |
| 7.1.2 Der Trägheitstensor . . . . .                                 | 83        |
| 7.1.3 Der Satz von Steiner . . . . .                                | 87        |
| 7.1.4 Hauptachsentransformation, Trägheitsellipsoid . . . . .       | 89        |
| <b>7.2 Dynamik des starren Körpers . . . . .</b>                    | <b>93</b> |
| 7.2.1 Drehimpulssatz . . . . .                                      | 93        |
| 7.2.2 Kräftefreier Kreisel: $\mathbf{N} = 0$ . . . . .              | 95        |
| 7.2.3 Symmetrischer Kreisel mit $A = B$ . . . . .                   | 97        |
| 7.2.4 Schwerer symmetrischer Kreisel . . . . .                      | 100       |
| 7.2.5 Die Eulerschen Winkel . . . . .                               | 101       |
| 7.2.6 Allgemeine Bewegungsgleichungen des starren Körpers . . . . . | 102       |

---

## 7.1 Erhaltungsgrößen und Kinematik

### 7.1.1 Definitionen und Koordinatensysteme

Ein System von  $N$  Massenpunkten, das den holonomen Zwangsbedingungen  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = a_{ij} = \text{const.}$  für alle  $i, j = 1, \dots, N$  genügt, heißt *starren Körper*.

Dieses Modell ist eine Idealisierung realer Körper. Es ist nützlich, solange Deformationen keine Rolle spielen.

Jede Bewegung eines starren Körpers läßt sich in eine Translation und eine Rotation zerlegen. Bei der Translation bewegt sich der Körper so, als ob seine gesamte Masse im Schwerpunkt vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an diesem Punkt angreifen würden. Komplizierter sind die Rotationsbewegungen, die wir im folgenden behandeln wollen.

### Anzahl der Freiheitsgrade

Zuerst wollen wir uns die Anzahl der Freiheitsgrade eines starren Körpers überlegen. Es gibt  $3N$  Koordinaten und  $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$  Zwangsbedingungen. Da es für große  $N$  mehr Zwangsbedingungen als verfügbare Koordinaten gibt, können die Zwangsbedingungen nicht unabhängig voneinander sein. Wir können sie also nicht zur Bestimmung der Freiheitsgrade verwenden.

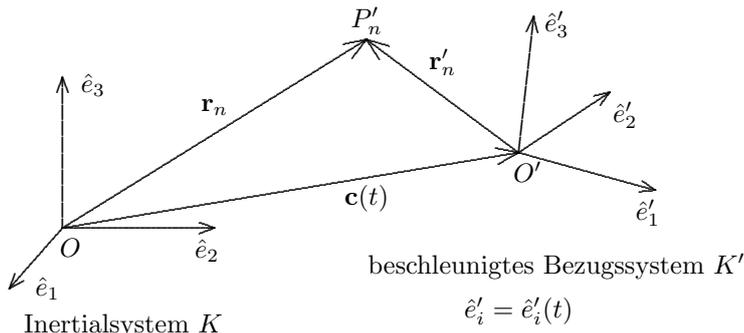
Mit der Angabe von 3 Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen, sind bereits die Orte aller Punkte eines starren Körpers bestimmt. Diese 3 ausgezeichneten Punkte unterliegen den 3 unabhängigen Zwangsbedingungen  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \text{const.}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j$ . Somit bleiben von den allgemein 9 Freiheitsgraden dieser 3 Massenpunkten für den starren Körper 6 Freiheitsgrade übrig.

Oder anschaulicher: der erste Punkt kann sich frei bewegen, er besitzt drei Freiheitsgrade. Der zweite Punkt muß einen festen Abstand zum ersten Punkt einhalten und kann sich nur auf einer Kugelschale mit Abstand  $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$  um den ersten Punkt bewegen. Macht zwei Freiheitsgrade für Punkt 2 auf der Kugeloberfläche. Liegen die ersten beiden Punkte fest, bleibt für den dritten Punkt der Schnitt zweier

Kugelflächen um Punkt 1 und Punkt 2 mit den Radien  $|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|$  bzw.  $|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|$ , was nach Voraussetzung  $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$  ein Kreisring ist. So bleibt für Punkt 3 noch ein Freiheitsgrad. Jeder weitere Punkt muß vorgegebene Abstände zu diesen drei Punkten einhalten, seine Lage ist also schon völlig bestimmt. Insgesamt sind es also 6 Freiheitsgrade: 3 Freiheitsgrade der Translation und 3 Freiheitsgrade der Rotation.

### Körperfestes Bezugssystem

Wir führen nun ein körperfestes Bezugssystem  $K'$  ein, welches fest mit dem starren Körper verbunden ist, d.h. die Massenpunkte führen keine Bewegung relativ zu  $K'$  aus. Im folgenden beziehen sich ungestrichelte Koordinaten auf das Inertialsystem  $K$  und gestrichelte Koordinaten auf das körperfeste System  $K'$ .



Die Ortsvektoren in  $K'$  sollen konstant sein, also

$$\frac{d'\mathbf{r}'_n}{dt} = \mathbf{v}'_n = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d'^2\mathbf{r}'_n}{dt^2} = \mathbf{a}'_n = 0 \quad (7.1)$$

Jetzt erinnern wir uns an die ferne Vergangenheit, an das Kapitel über beschleunigte Bezugssysteme 4.1 ab Seite 36. Dort hatten wir Formeln für die Geschwindigkeit und Beschleunigung in bewegten Koordinatensystemen hergeleitet:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{c}}{dt} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \\ \mathbf{a} &= \frac{d^2\mathbf{c}}{dt^2} + \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \end{aligned}$$

Setzen wir (7.1) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_n &= \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_n \\ \mathbf{a}_n &= \ddot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_n) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'_n \end{aligned}$$

Wer keine Lust hat zu blättern, kann auch nochmal neu denken:

Wählt man einen beliebigen Punkt  $O'$  des starren Körpers als Ursprung von  $K'$ , so setzt sich die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_n$  eines beliebigen Körperpunktes  $P'$  zusammen aus der Translationsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{tr}$  von  $O'$  und der Bahngeschwindigkeit, die  $P'$  bei der Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  um  $O'$  hat.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_n &= \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = \frac{d\mathbf{c}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'_n}{dt} \\ &= \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_n \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_n}{dt^2} = \ddot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_n) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'_n \quad (7.3)$$

Man wähle nun einen anderen Punkt  $\tilde{O}'$  mit  $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} + \Delta$  als Ursprung des körperfesten Systems ( $\Delta$  sei *körperfest*). Also gilt auch  $\tilde{\mathbf{r}}'_n = \mathbf{r}'_n - \Delta$ . Da  $\Delta$  körperfest ist, kann man  $\dot{\tilde{\mathbf{c}}}$  mit Gleichung (7.2) berechnen:  $\dot{\tilde{\mathbf{c}}} = \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \times \Delta$ . Aus den letzten Gleichungen erhält man durch Umstellen

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{c}}} &= \dot{\mathbf{c}} - \boldsymbol{\omega} \times \Delta \\ \mathbf{r}'_n &= \tilde{\mathbf{r}}'_n + \Delta\end{aligned}$$

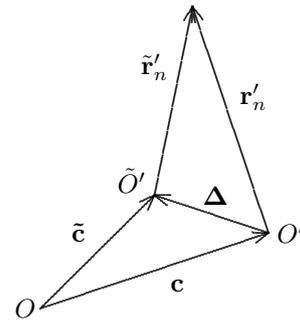
Dies kann man nun wieder in (7.2) einsetzen und erhält so die Geschwindigkeit in den ‚neuen Koordinaten‘  $\tilde{\mathbf{c}}$  und  $\tilde{\mathbf{r}}'_n$ :

$$\mathbf{v}_n = \dot{\tilde{\mathbf{c}}} - \boldsymbol{\omega} \times \Delta + \boldsymbol{\omega} \times (\tilde{\mathbf{r}}'_n + \Delta) = \dot{\tilde{\mathbf{c}}} + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}'_n$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie (7.2). Das muß sogar so sein, da kein bestimmter Punkt als Koordinatenursprung ausgezeichnet ist. Man erkennt:

Die Translationsgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{c}}$  ist abhängig von der Wahl des Ursprungs.

**Der Vektor  $\boldsymbol{\omega}$  der momentanen Drehung ist eindeutig festgelegt.**



## Kreisel und Rotor

Falls ein Punkt des starren Körpers festgelegt ist, ist die Zahl der Freiheitsgrade um 3 reduziert (nur die 3 Freiheitsgrade der Rotation bleiben übrig, generalisierte Koordinaten sind in der Regel die 3 Eulerschen Winkel, s.u.). Die momentane Drehachse geht stets durch diesen Punkt. Das System mit 3 Freiheitsgraden wird *Kreisel* genannt.

Falls 2 Punkte des starren Körpers festgelegt sind, kann dieser sich nur um die Achse durch die beiden Punkte drehen (nur ein Freiheitsgrad der Rotation bleibt übrig, der Drehwinkel um die Achse ist die generalisierte Koordinate). Man spricht von *Rotor* oder, wenn Bewegung im Schwerfeld betrachtet wird, von einem *physikalischen Pendel*.

## 7.1.2 Der Trägheitstensor

### Die kinetische Energie der Rotation, Teil I

Für die kinetische Energie des starren Körpers gilt:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n |\mathbf{v}_n|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\mathbf{v}_{tr} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_n)^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n \mathbf{v}_{tr}^2}_{=: T_{tr}} + \sum_{n=1}^N m_n \mathbf{v}_{tr} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_n) + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_n)^2}_{=: T_{rot}} \\ &= T_{tr} + \sum_{n=1}^N m_n \mathbf{r}'_n (\mathbf{v}_{tr} \times \boldsymbol{\omega}) + T_{rot}\end{aligned}\quad (7.4)$$

Die kinetische Energie ist also die Summe aus Translationsenergie  $T_{tr}$  des Ursprungs des körperfesten Systems  $K'$ , der Rotationsenergie  $T_{rot}$  der Drehbewegung um diesen Ursprung und einem gemischten Term. Dieser verschwindet aber, wenn der Ursprung von  $K'$  ruht ( $\mathbf{v}_{tr} = 0$ ) oder wenn dieser mit dem Schwerpunkt des starren Körpers zusammenfällt ( $\sum m_n \mathbf{r}'_n = 0$ ).

Zur Vereinfachung nehmen wir nun an, daß der starre Körper keine Translationsbewegungen ausführt ( $\mathbf{v}_{tr} = 0$  bzw.  $\dot{\mathbf{c}} = 0$ ).

Wenn  $\varphi$  der Winkel zwischen  $\boldsymbol{\omega}$  und  $\mathbf{r}'_n$  ist, gilt

$$|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_n|^2 = |\boldsymbol{\omega}|^2 |\mathbf{r}'_n|^2 \sin^2 \varphi = |\boldsymbol{\omega}|^2 |\mathbf{r}'_n|^2 - (|\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{r}'_n| \cos \varphi)^2 = |\boldsymbol{\omega}|^2 |\mathbf{r}'_n|^2 - (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_n)^2. \quad (7.5)$$

Damit erhalten wir aus (7.4) mit  $\mathbf{v}_{tr} = \dot{\mathbf{c}} = 0$ :

$$\begin{aligned} T &= T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_n|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (|\mathbf{r}'_n|^2 |\boldsymbol{\omega}|^2 - (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_n)(\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_n)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n \left( |\mathbf{r}'_n|^2 \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha^2 - \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha x_\alpha^{(n)} \sum_{\beta=1}^3 \omega_\beta x_\beta^{(n)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left( \sum_{n=1}^N m_n (|\mathbf{r}'_n|^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha^{(n)} x_\beta^{(n)}) \right) \omega_\alpha \omega_\beta \end{aligned} \quad (7.6)$$

$\delta_{\alpha\beta} := \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \end{cases}$  das sogenannte *Kroneckersymbol*. Wegen der vielen Nullen in der Doppelsumme gilt für  $\delta$  zum Beispiel

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^3 \delta_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta = \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha^2.$$

$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  muß im körperfesten System dargestellt sein.

Die runde Klammer nennen wir jetzt Trägheitstensor bzw. genauer Komponenten des Trägheitstensors:

$$\Theta_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^N m_n (|\mathbf{r}'_n|^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha^{(n)} x_\beta^{(n)}) \quad (7.7)$$

Damit schreibt sich dann die Rotationsenergie als

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \Theta_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta \quad (7.8)$$

## Über Tensoren

Die letzten zwei, drei Formeln schauen zwar auf den ersten Blick völlig abgespaced aus, aber vom Prinzip her verwendet ihr genau solche Gleichungen bereits seit der zwölften Klasse. **Tensoren sind nicht böse.**

Ihr kennt (hoffentlich) die Gleichung „Energie=Kraft mal Weg“:

$$E = \mathbf{F} \mathbf{s}$$

Das läßt sich auch als Summe schreiben:

$$E = \sum_{\alpha=1}^3 F_\alpha s_\alpha$$

Wenn ihr jetzt ein anderes (z.B. gedrehtes) Koordinatensystem verwendet, habt ihr dort andere Zahlen  $F'_\alpha$  und  $s'_\alpha$ . Aber trotzdem ist die Energie dieselbe:

$$E = \sum_{\alpha=1}^3 F'_\alpha s'_\alpha$$

Ihr habt sechs neue Zahlen, die ihr irgendwie miteinander vermantst, und Ihr erhaltet das gleiche Ergebnis, das Ihr von den sechs ursprünglichen Zahlen bekommen habt!!! (man beachte: hier stehen drei Ausrufezeichen) Man könnte fast auf den Gedanken kommen, daß da irgendwie „noch mehr“ dran ist an diesen  $F$ 's und  $s$ 's, als nur die blanken Zahlen. Irgendwie sollte doch die Unabhängigkeit der Energie vom Koordinatensystem schon in den  $F$ 's und  $s$ 's ‚dringesteckt‘ haben. Tut's auch. Und zwar ist das Wichtige das Transformationsverhalten. Wenn man das Koordinatensystem dreht, ändern sich die  $F$ 's und  $s$ 's nicht auf zufällige, sondern auf eine ganz bestimmte Art und Weise. Genau so, daß Skalarprodukte erhalten bleiben.  $E$  heißt dann übrigens *invariant* gegenüber Koordinatentransformationen.

Aber jetzt geben wir solchen Zahlentripeln mit dem gewissen ‚Etwas‘ einen Namen, wir werden sie Vektoren nennen. Definition: Ein Vektor ist ein Zahlentripel, das sich wie ein Vektor transformiert<sup>1</sup>.

So, zurück zu Gleichung (7.8). Was haben wir da? Links die Rotationsenergie, die sicher nicht von der Richtung abhängt, aus der ich den Kreisel betrachte.  $T_{rot}$  ist also invariant bei Koordinatentransformationen. Rechts stehen Summen von 1 bis 3, diese komischen  $\Theta$ 's und Vektoren. Das schaut doch fast so aus wie unser  $E = \mathbf{F}\mathbf{s}$ . Der einzige Unterschied ist, daß  $\Theta$  zwei Indices hat und demgemäß aus neun Zahlen besteht statt aus dreien wie unsere Vektoren. Aber vielleicht haben ja Gruppen aus 9 Zahlen auch manchmal so tolle Transformationseigenschaften?  $\Theta$  hat ganz gewiß solche tollen Eigenschaften, denn wenn ich seine beiden Indices mit Vektoren ‚stopfe‘ und drüber summiere, erhalte ich eine Zahl, die nicht vom Koordinatensystem abhängt. Solche Gruppen aus 9 Zahlen mit bestimmten Transformationsverhalten heißen ab jetzt *Tensoren*. Und zwar genauer *Tensoren zweiter Stufe*, weil sie zwei Indices haben. Es gibt nämlich auch welche mit drei, vier, ... Indices; die bestehen dann aus  $3^3$ ,  $3^4$ , ... Komponenten. Ja, und Vektoren, die ja nur einen Index haben, sind dann Tensoren erster Stufe und meine Energie  $E$  mit Null Indices ist ein Tensor nullter Stufe. So gesehen ist dann  $E = \mathbf{F}\mathbf{s}$  eine Tensorgleichung zwischen einem Tensor nullter Stufe und zwei Tensoren erster Stufe.

Ok, genug Text; nochmal: Wenn man die Koordinaten des  $n$ -ten Punktes nicht  $(x_n, y_n, z_n)$ , sondern  $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$  nennt, lauten die Komponenten des Trägheitstensors

$$\Theta_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^N m_n (|\mathbf{r}'_n|^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha^{(n)} x_\beta^{(n)})$$

Er ist symmetrisch, da  $\Theta_{\alpha\beta} = \Theta_{\beta\alpha}$  gilt. Da er genau zwei Indices hat, kann man seine Komponenten bequem als Matrix aufschreiben:

$$\underline{\Theta} = \sum_{n=1}^N m_n \begin{pmatrix} y_n^2 + z_n^2 & -x_n y_n & -x_n z_n \\ -y_n x_n & x_n^2 + z_n^2 & -y_n z_n \\ -z_n x_n & -z_n y_n & x_n^2 + y_n^2 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

Die Diagonal- und Nichtdiagonalelemente des Trägheitstensors haben eigene Bezeichnungen.  $\Theta_{\alpha\alpha}$  ist das Trägheitsmoment um die die  $x_\alpha$ -Achse, und für  $\alpha \neq \beta$  heißt  $\Theta_{\alpha\beta}$  *Deviationmoment*.

### Transformationsverhalten

So, jetzt wollen wir explizit ausrechnen, wie sich ein Tensor transformiert. Wir betrachten den Übergang zu einem anderen rechtwinkligen Koordinatensystem, das wir mit Tilden bezeichnen:

<sup>1</sup>Ich weiß, das hört sich idiotisch an. Ich versuche, mich um die exakten Transformationsgleichungen zu drücken, weil sie nichts zum Verständnis beitragen.

Noch was: Physiker verwenden unglücklicherweise denselben Namen *Vektor* für physikalischen Vektoren und für mathematischen Vektoren. Bei den ersten ist das Transformationsverhalten wichtig, bei den letzteren eher Begriffe wie Basis, orthonormal, ...

$$\tilde{\mathbf{r}}_n = (\tilde{x}_1^{(n)}, \tilde{x}_2^{(n)}, \tilde{x}_3^{(n)})$$

Eine solche Koordinatentransformation wird durch eine Drehmatrix  $D_{ik}$  gegeben, z.B. schaut  $D_{ik}$  für eine Drehung um die z-Achse so aus:

$$D_{ik} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Drehmatrizen sind im allgemeinen orthogonal, das heißt

$$D^t D = D D^t = \mathbf{E}$$

( $\mathbf{E}$  ist die Einheitsmatrix), oder in Summenschreibweise

$$\sum_{k=1}^3 D_{ki} D_{kj} = \sum_{k=1}^3 D_{ik} D_{jk} = \delta_{ij} \quad (7.10)$$

Noch ein Satz zum Verständnis: Zwei Matrizen  $A_{ij}$  und  $B_{kl}$  multipliziert man, indem man „über die mittleren beiden Indices summiert“. Will ich also  $C = AB$ , so muß ich aus dem ‚k‘ von  $B_{kl}$  ein ‚j‘ machen und über  $j$  summieren:  $C_{il} = \sum_j A_{ij} B_{jl}$ . Transponieren bedeutet, die beiden Indices an einer Matrix zu vertauschen; deswegen stehen in (7.10) die k's beide vorne oder beide hinten.

Den gedrehten Vektor erhalten wir, indem wir die Drehmatrix mit dem ursprünglichen Vektor multiplizieren. Das schaut in Summenschreibweise so aus:

$$\tilde{x}_i^{(n)} = \sum_{k=1}^3 D_{ik} x_k^{(n)}$$

Und wie transformiert sich nun  $\Theta$ ? Wir berechnen  $\tilde{\Theta}_{ik}$  und versuchen, es durch die alten Koordinaten auszudrücken:

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{ik} &= \sum_{n=1}^N m_n (|\tilde{\mathbf{r}}_n'|^2 \delta_{ik} - \tilde{x}_i^{(n)} \tilde{x}_k^{(n)}) \\ &= \sum_{n=1}^N m_n (|\mathbf{r}_n'|^2 \delta_{ik} - \sum_{j,m} D_{ij} x_j^{(n)} D_{km} x_m^{(n)}) \\ &= \sum_{j,m} D_{ij} D_{km} \sum_{n=1}^N m_n (|\mathbf{r}_n'|^2 \delta_{jm} - x_j^{(n)} x_m^{(n)}) \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde  $\sum_{j,m} D_{ij} D_{km} \delta_{jm} = \sum_j D_{ij} D_{kj} = \delta_{ik}$  verwendet. Wir erhalten also

$$\tilde{\Theta}_{ik} = \sum_{j,m} D_{ij} D_{km} \Theta_{jm} \quad (7.11)$$

So, jetzt können wir Tensoren definieren:

Physikalische Größen, die sich bezüglich aller Indizes beim Übergang zu einem anderen orthogonalen Koordinatensystem transformieren wie der Ortsvektor, heißen *kartesische (euklidische) Tensoren*.

$\underline{\Theta}$  ist ebenso wie der Ortsvektor und der Drehimpuls auf einen bestimmten Ursprung bezogen.  $\underline{\Theta}$  ist ein am Ursprung gebundener Tensor.

Zurück zur kinetischen Energie. Die kann man nun auch koordinatensystemunabhängig schreiben. Obendrein bietet es sich bei Tensoren zweiter Stufe wirklich an, sie als Matrix aufzufassen, da die Summationen genau den Matrizenmultiplikationen entsprechen:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^t \underline{\Theta} \boldsymbol{\omega}$$

Und wie kann man damit  $T$  berechnen? Schlimmstenfalls zu Fuß: Man wähle sich irgendein beliebiges Koordinatensystem, das einem gerade in den Kram paßt. Dort berechne man die Komponenten von  $\boldsymbol{\omega}$  und  $\underline{\Theta}$  und mit diesen Zahlen das angegebene Matrizenprodukt.

Mit Matrizen sieht auch Gleichung (7.11) gleich viel schöner aus:

$$\tilde{\Theta} = D \underline{\Theta} D^t$$

Sieh da, sieh da. Eine Ähnlichkeitstransformation. Gab's da nicht irgendeinen Satz, daß man symmetrische Matrizen immer auf Diagonalform transformieren kann? Übertragen bedeutet dieser Satz nun: Zu einem symmetrischen Tensor zweiter Stufe gibt es immer ein Koordinatensystem, in dem dieser Tensor diagonal ist.

Man kann also den Trägheitstensor durch Wahl eines geeigneten rechtwinkligen Koordinatensystem immer auf Diagonalgestalt bringen. Dann verschwinden die Deviationsmomente. Die Achsen dieses besonderen Koordinatensystems nennt man *Hauptträgheitsachsen*, die noch vorhandenen Zahlen auf der Diagonale  $\Theta_{kk}$  sind die *Hauptträgheitsmomente*.

Bislang war die Lage des Ursprungs des Koordinatensystems vollkommen beliebig. Das bedeutet, daß durch *jeden* Punkt des starren Körpers mindestens 3 aufeinander senkrecht stehende Hauptträgheitsachsen gehen, und *nicht nur* durch den Schwerpunkt. Da der Trägheitstensor an den Ursprung gebunden ist, werden sich zwar je nach Wahl des Ursprungs verschiedene Zahlen  $\Theta_{\alpha\beta}$  ergeben und es werden auch die Hauptträgheitsmomente verschieden sein. Aber bei jeder Wahl des Ursprungs ist  $\Theta_{\alpha\beta}$  ein Tensor und zu jeder Wahl des Ursprungs gibt es ein Koordinatensystem in dem  $\Theta_{\alpha\beta}$  diagonal ist.

### 7.1.3 Der Satz von Steiner

Unter allen möglichen Ursprüngen im körperfesten Koordinatensystem ist der Schwerpunkt des Körpers ausgezeichnet. Der Ortsvektor des Schwerpunktes heiße ab jetzt  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)$ . Wir definieren nun  $\mathbf{r}_n^* = (x_1^{*(n)}, x_2^{*(n)}, x_3^{*(n)})$  als Ortsvektor des  $n$ -ten Massenpunkts im Schwerpunktsystem (die  $\mathbf{r}_n^*$  sind körperfest). Somit gilt:

$$\mathbf{r}'_n = \mathbf{R} + \mathbf{r}_n^*$$

$$\sum_{n=1}^N m_n \mathbf{r}_n^* = 0 \quad (7.12)$$

$$\sum_{n=1}^N m_n = M$$

Aus der Formel für den Trägheitstensor ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}
\Theta_{ik} &= \sum_{n=1}^N m_n \left( (\mathbf{R} + \mathbf{r}_n^*)^2 \delta_{ik} - (R_i + x_i^{*(n)}) (R_k + x_k^{*(n)}) \right) \\
&= \sum m_n \mathbf{R}^2 \delta_{ik} + 2\mathbf{R} \sum m_n \mathbf{r}_n^* \delta_{ik} + \sum m_n \mathbf{r}_n^{*2} \delta_{ik} \\
&\quad - \sum m_n R_i R_k - \sum m_n R_i x_k^{*(n)} - \sum m_n R_k x_i^{*(n)} - \sum m_n x_i^{*(n)} x_k^{*(n)} \\
&= M\mathbf{R}^2 \delta_{ik} - MR_i R_k + \sum_{n=1}^N m_n \left( \mathbf{r}_n^{*2} \delta_{ik} - x_i^{*(n)} x_k^{*(n)} \right)
\end{aligned}$$

(Die gemischten Terme  $\sum m_n \mathbf{R} \mathbf{r}_n$  bzw.  $\sum m_n R_i x_k^{*(n)}$  verschwinden wegen (7.12)) Die hintere Summe stellt gerade den Trägheitstensor  $\Theta_{ik}^*$  bezüglich des Schwerpunktsystems. Damit haben wir den *Steinerschen Satz* gefunden:

$$\Theta_{ik} = \Theta_{ik}^* + M(\mathbf{R}^2 \delta_{ik} - R_i R_k) \quad (7.13)$$

### Trägheitsmoment bezüglich fester Achse $\hat{e}$

Das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse  $\hat{e}$  mit  $|\hat{e}| = 1$  ist per definitionem<sup>2</sup>

$$\Theta_e = \sum_n m_n |\mathbf{r}'_{n\perp}|^2$$

Andererseits ist

$$\hat{e}^t \underline{\Theta} \hat{e} = \sum_n m_n |\mathbf{r}'_n \times \hat{e}|^2 = \sum_n m_n |\mathbf{r}'_{n\perp}|^2$$

Das erste ‚=‘ erhält man, wenn man die Herleitung der Gleichung (7.6) rückwärts betrachtet und  $\boldsymbol{\omega}$  durch  $\hat{e}$  ersetzt. Das zweite ‚=‘ erhält man aus der Definition des Kreuzproduktes.

Also gilt mit  $\hat{e} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  (und Summenkonvention):

$$\Theta_e = \hat{e}^t \underline{\Theta} \hat{e} = \hat{e}_i \Theta_{ik} \hat{e}_k$$

Setzt man jetzt noch (7.13) ein und berücksichtigt auch noch (7.5), so erhält man

$$\Theta_e = \hat{e}_i \Theta_{ik}^* \hat{e}_k + M \left( \mathbf{R}^2 \hat{e}_i \hat{e}_k \delta_{ik} - R_i \hat{e}_i R_k \hat{e}_k \right) = \Theta_e^* + M \underbrace{(\mathbf{R}^2 - (\mathbf{R}\hat{e})^2)}_{=|\mathbf{R} \times \hat{e}|^2} = \Theta_e^* + M |\mathbf{R}_\perp|^2$$

Das ist die geläufigere Variante des Steinerschen Satzes:

$$\Theta_e = \Theta_e^* + M \mathbf{R}_\perp^2 \quad (7.14)$$

Das Trägheitsmoment um eine beliebige Achse ist gleich der Summe aus dem Trägheitsmoment um eine dazu parallele Achse durch den Schwerpunkt des Körpers und der Masse mal dem Abstand der Achse vom Schwerpunkt zum Quadrat.

Aus dieser Formulierung geht klar hervor, daß unter allen Trägheitsmomenten um zueinander parallele Achsen das Trägheitsmoment bezüglich der durch den Schwerpunkt gehenden Achse am kleinsten ist.

<sup>2</sup>Solltet Ihr in Ex I gelernt haben: Masse mal Quadrat des Abstandes zur Drehachse.

### 7.1.4 Hauptachsentransformation, Trägheitsellipsoid

#### Übergang zum Kontinuum

Obwohl Körper aus einzelnen Atomen zusammengesetzt sind, ist es unpraktisch, sie als diskretes Massensystem zu behandeln. Makroskopisch läßt sich der starre Körper als Kontinuum betrachten. Dazu führt man die Funktion der Massendichte  $\varrho(\mathbf{r}')$  ein. Ein Massenelement ist dann durch  $dm = \varrho(\mathbf{r}')dV$  gegeben. Wir gehen jetzt zum Kontinuum über. Dabei werden wir folgende Ersetzungen vornehmen:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{r}'_n \longrightarrow \mathbf{r}' & \mathbf{r}^*_n \longrightarrow \mathbf{r}^* \\ m_n \longrightarrow \varrho(\mathbf{r}')dV & \sum_{n=1}^N \longrightarrow \int_V \end{array}$$

Für Gesamtmasse, Schwerpunkt und Trägheitstensor ergibt sich daraus:

$$M = \int_V \varrho(\mathbf{r}')dV = \int_V \varrho(\mathbf{r}^*)dV \quad (7.15)$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r}' \varrho(\mathbf{r}')dV \quad \text{wobei} \quad \int_V \varrho(\mathbf{r}^*)\mathbf{r}^*dV = 0 \quad (7.16)$$

$$\underline{\Theta} = \int_V \varrho(\mathbf{r}')(|\mathbf{r}'|^2 \underline{1} - \mathbf{r}'\mathbf{r}')dV \quad (7.17)$$

$$\Theta_{ik} = \int_V \varrho(\mathbf{r}')(|\mathbf{r}'|^2 \delta_{ik} - x_i x_k)dV \quad (7.18)$$

#### Drehimpuls

Der Eigendrehimpuls des starren Körpers bezogen auf ein körperfestes Koordinatensystem<sup>3</sup>  $K'$  berechnet man wie üblich mit  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}' &= \sum_{n=1}^N m_n \mathbf{r}'_n \times \mathbf{v}'_n \\ &= \sum_{n=1}^N m_n \mathbf{r}'_n \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_n) \\ &= \sum_{n=1}^N m_n (|\mathbf{r}'_n|^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_n) \mathbf{r}'_n) \\ &= \boldsymbol{\omega}^t \underline{\Theta} = \underline{\Theta} \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Das letzte ‚=‘ kann man durch die Komponentenschreibweise einsehen. Damit schauen die letzten beiden Zeilen so aus:

<sup>3</sup>Man kann die Komponenten des Drehimpulsvektors natürlich in jedem beliebigen Koordinatensystem angeben. Allerdings bleibt der Drehimpuls im körperfesten System auch bei Abwesenheit äußerer Kräfte *nicht* erhalten. Ohne äußere Kräfte ist der Drehimpuls im Inertialsystem konstant, also wird es sich -falls der Körper rotiert- im mitrotierenden  $K'$  ändern.

Ach ja, noch was: Bei der Berechnung muß man die Geschwindigkeiten verwenden, die die Massenpunkte im Inertialsystem haben.

$$\begin{aligned}
L'_j &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 m_n \left( |\mathbf{r}'_n|^2 \omega_i \delta_{ij} - \omega_i r'_i{}^{(n)} r'_j{}^{(n)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^3 \Theta_{ij} \omega_i = \sum_{i=1}^3 \Theta_{ji} \omega_i
\end{aligned}$$

Für die Komponenten des Eigendrehimpulses gilt somit allgemein

$$L'_i = \sum_{j=1}^3 \Theta_{ij} \omega_j \quad (7.19)$$

und entlang von Hauptträgheitsachsen, wo zwei der Summanden rechts gleich Null sind:

$$L'_i = \Theta_{ii} \omega_i \quad (7.20)$$

Wir befinden uns übrigens nach wie vor im körperfesten System;  $L'_i$  sind die körperfesten Komponenten des auf den gewählten Ursprung bezogenen Drehimpulses,  $\omega_i$  sind die körperfesten Komponenten der Winkelgeschwindigkeit.

Im allgemeinen ist der Eigendrehimpuls  $\mathbf{L}$  eines starren Körpers nicht parallel zur Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$ . Rotiert der Körper jedoch um eine Hauptträgheitsachse oder handelt es sich um einen Kugelkreisel (s.unten), sind  $\mathbf{L}$  und  $\boldsymbol{\omega}$  parallel.

### Rotationsenergie, Energieellipsoid

Die Rotationsenergie des starren Körpers ist eine quadratische Form der Komponenten der Winkelgeschwindigkeit. Um dies zu zeigen, erinnern wir uns an folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
2T &= \sum_{i,k} \omega_i \Theta_{ik} \omega_k \\
&= \Theta_{11} \omega_1^2 + \Theta_{22} \omega_2^2 + \Theta_{33} \omega_3^2 + 2\Theta_{12} \omega_1 \omega_2 + 2\Theta_{13} \omega_1 \omega_3 + 2\Theta_{23} \omega_2 \omega_3 \\
&=: f(\boldsymbol{\omega})
\end{aligned}$$

Da  $T$  konstant ist, muß sich die Spitze des  $\boldsymbol{\omega}$ -Vektors auf dieser Fläche bewegen. Eine quadratische Form beschreibt i.a. ein dreiaxsiges Ellipsoid, das hier *Energieellipsoid* heißt.

Ganz allgemein gilt: Ist eine Fläche durch  $f(\mathbf{r}) = \text{const.}$  gegeben, so steht der Gradient  $\text{grad} f(\mathbf{r})$  an jedem Punkt dieser Fläche senkrecht zur Fläche.

Wenn wir dieses Satz hier anwenden erhalten wir ein nettes Ergebnis, therefore: let's do it:

$$\frac{1}{2} \text{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \\ \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \\ \frac{\partial T}{\partial \omega_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_{11} \omega_1 + \Theta_{12} \omega_2 + \Theta_{13} \omega_3 \\ \Theta_{12} \omega_1 + \Theta_{22} \omega_2 + \Theta_{23} \omega_3 \\ \Theta_{13} \omega_1 + \Theta_{23} \omega_2 + \Theta_{33} \omega_3 \end{pmatrix} = \underline{\Theta} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{L}$$

Daraus ist sofort ersichtlich, daß  $\mathbf{L}$  immer senkrecht auf dem Energieellipsoid steht. In anderen Worten:  $\boldsymbol{\omega}$  geht vom Mittelpunkt eines Ellipsoids an die Oberfläche eben dieses Ellipsoids;  $\mathbf{L}$  ist parallel zur Normalen ans Ellipsoid in diesem Punkt.

Also ist nur entlang der Hauptträgheitsachsen  $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{L}$ .

Besitzt der Körper eine Symmetrieachse, so ist sie parallel zu einer Hauptträgheitsachse. Die anderen beiden sind dann beliebige, orthogonale Achsen dazu. Die 6 Komponenten des Trägheitstensors entsprechen den 3 Hauptachsen und 3 Winkeln für die Orientierung des Ellipsoids.

### Trägheitsellipsoid

Man kann das Energieellipsoid normieren. Eine Änderung von  $T$  ändert lediglich die Größe des Ellipsoids, nicht aber seine Form.

Das Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen Achse  $\hat{e}$  ist bekanntlich gegeben durch  $\Theta_e = \hat{e} \Theta \hat{e}$ .

Wir definieren einen Vektor  $\xi = \frac{\hat{e}}{\sqrt{\Theta_e}}$  und erhalten so eine quadratische Form bezüglich  $\xi$ :

$$\xi \Theta \xi = \sum_{ij} \Theta_{ij} \xi_i \xi_j = 1$$

Auch dieser quadratischen Form entspricht, wie bereits der Rotationsenergie, eine Fläche im dreidimensionalen Raum. Man nennt diese Fläche *Trägheitsellipsoid*. Das Trägheitsellipsoid ist eine reine Eigenschaft des starren Körpers und nicht von dessen Bewegung abhängig. Zeichnet man in dieses Ellipsoid eine beliebige Drehachse  $\hat{e}$  ein, so schneidet sie die Fläche in einem Punkt, der die Koordinaten

$$x_i = \frac{e_i}{\sqrt{\Theta_e}}$$

und wegen  $|\hat{e}| = 1$  den Abstand  $\frac{1}{\sqrt{\Theta_e}}$  vom Zentrum des Ellipsoids hat.

Anschaulich entspricht ein langgestrecktes Trägheitsellipsoid einem langgestrecktem Körper. Symmetrische Kreisel haben ein Rotationsellipsoid, Kugelkreisel eine Kugel als Trägheitsellipsoid. Hat man irgendeinen Körper, bei dem die Trägheitsmomente bzgl. dreier verschiedener Achsen (sie brauchen nicht rechtwinklig aufeinander zu stehen) gleich sind, so muß das Trägheitsellipsoid eine Kugel sein. Das bedeutet: Das Trägheitsmoment bzgl. *jeder* Achse ist gleich. Wir haben einen Kugelkreisel. Zum Beispiel hat ein Würfel wegen seinen Symmetrien vier gleiche Trägheitsmomente  $\Theta$  bzgl. Achsen durch seinen Mittelpunkt senkrecht zu den Seitenflächen. Also ist auch des Trägheitsmoment um die Raumdiagonale gleich diesem  $\Theta$ . Das kann sehr viel Arbeit sparen.

Jetzt führen wir wieder einige Bezeichnungen ein. Die Hauptachsen des starren Körpers heißen ab jetzt  $a, b$  und  $c$ . Und die Hauptträgheitsmomente seien  $A, B$  und  $C$ :

$$\Theta_e = \begin{cases} A & \text{in Richtung der Hauptachse } a \\ B & \text{in Richtung der Hauptachse } b \\ C & \text{in Richtung der Hauptachse } c \end{cases}$$

Energie- und Trägheitsellipsoid haben beide die gleiche Orientierung im Raum, aber die Längen der Hauptachsen sind verschieden. Die jeweilige Hauptachsentransformation liefert für die Längen der Achse in Richtung  $a$ :

$$a_E = \frac{\sqrt{2T}}{\omega \sqrt{A}} \quad \text{für das Energieellipsoid}$$

$$a_T = \frac{1}{\sqrt{A}} \quad \text{für das Trägheitsellipsoid}$$

### Bestimmung der Hauptträgheitsachsen

Wir reden die ganze Zeit von Hauptträgheitsachsen, ohne gesagt zu haben, wie man sie denn nun so wirklich und praktisch und überhaupt berechnet.

Nur wenn  $\omega$  die Richtung einer Hauptträgheitsachse hat, ist  $\omega \parallel \mathbf{L}$ . Liegt also  $\omega$  in Richtung einer Hauptachse mit dem zugehörigen Trägheitsmoment  $\Theta$  (das ist keine Matrix, sondern eine ganz gewöhnliche Zahl), so gilt:

$$\Theta \omega = \mathbf{L} = \Theta \omega$$

bzw. in Komponentenschreibweise:

$$\sum_j \Theta_{ij} \omega_j = \sum_j \Theta \delta_{ij} \omega_j$$

$$\sum_j (\Theta_{ij} - \Theta \delta_{ij}) \omega_j = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad (7.21)$$

Dieses lineare Gleichungssystem in den drei Unbekannten  $\omega_i$  hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet:

$$\det(\Theta_{ik} - \Theta \delta_{ik}) = 0$$

In Matrixschreibweise:

$$\det(\underline{\Theta} - \Theta \mathbf{E}) = 0$$

Das ist eine Eigenwertgleichung; sie liefert uns eine kubische Gleichung in  $\Theta$ :

$$\Theta^3 - \Theta^2 \sum_{i=1}^3 \Theta_{ii} + \Theta \sum_{i=1}^3 M_i - \det(\Theta_{ik}) = 0$$

mit

$$M_1 = \Theta_{22}\Theta_{33} - \Theta_{23}\Theta_{32} \quad \text{und zyklisch}$$

Als Lösungen ergeben sich die Hauptträgheitsmomente, die wir  $A, B$  und  $C$  genannt haben:

$$\Theta_1 = A \quad \Theta_2 = B \quad \Theta_3 = C$$

Mit diesen  $\Theta$ 's ist Gleichung (7.21) nichttrivial lösbar. Eine Lösung  $\omega \neq 0$  gibt uns dann die Richtung der zugehörigen Hauptträgheitsachse.

### Bezeichnungen

unsymmetrische Kreisel:  $A \neq B \neq C$

symmetrische Kreisel: 2 Hauptträgheitsmomente gleich

Kugelkreisel:  $A = B = C$

Übrigens bedeutet Kugelkreisel *nicht*, daß der Körper eine Kugel ist. Auch ein völlig unregelmäßiger Körper kann drei gleiche Hauptträgheitsmomente haben (z.B. Würfel, Tetraeder)! Aber natürlich haben symmetrische Körper Trägheitsmomente, die diese Symmetrie berücksichtigen. Bei rotationssymmetrischen Körpern ist die Symmetrieachse („Figurenachse“) stets eine Hauptträgheitsachse, die beiden Hauptträgheitsmomente um dazu senkrechte Achsen sind gleich.

### Beispiel 1: Trägheitsmomente eines Quaders

Gegeben sei ein Quader mit Kantenlängen  $a, b, c$  und der Dichte  $\varrho_0$ . Die Koordinatenachsen legen wir parallel zu den Kanten des Quaders, den Ursprung in den Mittelpunkt des Quaders.

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 \Theta_{xx} &= \int_V \rho(\mathbf{r})(x^2 + y^2 + z^2 - x^2) dV \\
 &= \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} (y^2 + z^2) dz dy dx \\
 &= \rho_0 a \int_{-b/2}^{b/2} \left( cy^2 + \frac{c^3}{12} \right) dy \\
 &= \rho_0 a \left( c \frac{b^3}{12} + b \frac{c^3}{12} \right) \\
 &= \rho_0 a b c \frac{b^2 + c^2}{12} = M \frac{b^2 + c^2}{12}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \Theta_{xy} &= \int_V \rho(\mathbf{r}) \left( (x^2 + y^2 + z^2) \underbrace{\delta_{xy}}_{=0} - xy \right) dV \\
 &= \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} (-xy) dz dy dx \\
 &= -\rho_0 c \int_{-a/2}^{a/2} (0) dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Dieses Deviationsmoment verschwindet. Durch zyklisches Vertauschen erkennt man, daß auch die anderen Deviationsmomente verschwinden. Die Achsen parallel zu den Quaderkanten sind also die Hauptträgheitsachsen, und die Hauptträgheitsmomente sind

$$A = M \frac{b^2 + c^2}{12} \quad \text{und zykl.}$$

### Beispiel 2: Trägheitsmoment einer Kugel

Die kugelsymmetrische Kugel hat wohl oder übel um jede Achse durch den Mittelpunkt das gleiche Trägheitsmoment; also sind alle Achsen durch den Mittelpunkt Hauptträgheitsachsen und die Hauptträgheitsmomente sind gleich groß.

Wir berechnen als Trick die Summe der drei gleichgroßen Hauptträgheitsmomente:

$$\begin{aligned}
 A + B + C &= \int_V \rho(\mathbf{r}) ((\mathbf{r}^2 - x^2) + (\mathbf{r}^2 - y^2) + (\mathbf{r}^2 - z^2)) dV \\
 &= \rho_0 \int_V 2\mathbf{r}^2 dV \\
 &= 4\pi\rho_0 \int_0^R 2r^2 r^2 dr = 4\pi\rho_0 \frac{2}{5} R^5 = \frac{6}{5} MR^2
 \end{aligned}$$

Wegen  $A = B = C$  folgt daraus

$$A = B = C = \frac{2}{5} MR^2.$$

## 7.2 Dynamik des starren Körpers

### 7.2.1 Drehimpulssatz

Die Bewegung eines starren Körpers setzt sich zusammen aus der Bewegung des Bezugspunktes (=Ursprung des körperfesten Systems) und einer Rotation um diesen Bezugspunkt. Insbesondere wenn der

Bezugspunkt der Schwerpunkt ist, hatten wir bereits die Bewegungsgesetze diskutiert. Jetzt soll die Drehung um den Bezugspunkt untersucht werden.

Der Bezugspunkt sei raumfest, und er liege im Ursprung, so daß  $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{c} = 0$  gilt.

Im Inertialsystem gilt mit dem äußeren Drehmoment  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt}\mathbf{L} = \frac{d}{dt}(\underline{\Theta}\boldsymbol{\omega}) = \underline{\dot{\Theta}}\boldsymbol{\omega} + \underline{\Theta}\dot{\boldsymbol{\omega}}$$

Das Problem bei dieser Formulierung ist jedoch, daß die zeitliche Änderung des Trägheitstensors  $\underline{\dot{\Theta}}$  schwierig darzustellen ist. Aus diesem Grund geht man auf das körperfeste Koordinatensystem über. Die zeitliche Änderung des Drehimpulsvektors im Inertialsystem setzt sich -wie bei jedem Vektor, vgl. (4.6) auf Seite 38- zusammen aus seiner Rotation und der zeitliche Änderung ( $\frac{d'}{dt}$ ) im körperfesten System. Es bezeichne noch einmal  $\mathbf{L}'$  und  $\mathbf{N}'$  die Vektoren im körperfesten Bezugssystem  $K'$ . Dann gilt

$$\frac{d'}{dt}\mathbf{L}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}' = \mathbf{N}' \quad (7.22)$$

Haha! Im körperfesten Bezugssystem ist  $\underline{\Theta}$  zeitunabhängig, wir erhalten also

$$\frac{d'}{dt}\mathbf{L}' = \frac{d'}{dt}(\underline{\Theta}\boldsymbol{\omega}') = \underline{\Theta}\frac{d'\boldsymbol{\omega}'}{dt} = \underline{\Theta}\dot{\boldsymbol{\omega}}'. \quad (7.23)$$

Aber, sic, der Erhaltungssatz für die Gesamtschwerigkeit gilt auch hier. Der **Nachteil** ist nämlich, daß das äußere Drehmoment  $\mathbf{N}'$  im körperfesten Bezugssystem im allgemeinen zeitabhängig ist, selbst wenn es im raumfesten Bezugssystem konstant war.

Setzt man (7.23) in (7.22) ein, erhält man die Bewegungsgleichungen,

$$\underline{\Theta}\dot{\boldsymbol{\omega}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}' = \mathbf{N}', \quad (7.24)$$

die man natürlich auch wieder in Summenschreibweise mit Summenkonvention schreiben kann<sup>4</sup>

$$\Theta_{ik}\dot{\omega}'_k + \varepsilon_{ijk}\omega'_j L'_k = N'_i$$

Jetzt werden wir ausnutzen, daß wir mit Tensoren und Vektoren kämpfen. Tensorgleichungen gelten in jedem Koordinatensystem, also können wir uns ein schönes wählen. Und das ist dasjenige mit den meisten Nullen, eines in dem  $\Theta_{ik}$  diagonal ist. Wir wählen also Hauptträgheitsachsen als Koordinatenachsen. Dann gilt  $\mathbf{L}' = (A\omega'_1, B\omega'_2, C\omega'_3)$ , und aus (7.24) werden die sog. *Eulerschen Kreiselgleichungen*:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}'_1 + (C - B)\omega'_3\omega'_2 &= N'_1 \\ B\dot{\omega}'_2 + (A - C)\omega'_1\omega'_3 &= N'_2 \\ C\dot{\omega}'_3 + (B - A)\omega'_2\omega'_1 &= N'_3 \end{aligned} \quad (7.25)$$

Diese Gleichungen sind nicht einfach. Es handelt sich um nichtlineare, gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit. Im allgemeinen Fall sind sie schwierig zu lösen, da das äußere Drehmoment  $\mathbf{N}$  in das rotierende Bezugssystem transformiert werden muß. Dazu braucht man dann auch noch die

<sup>4</sup> $\varepsilon_{ijk}$  ist der *total antisymmetrische Einheitstensor dritter Stufe*. Er hat in jedem Koordinatensystem die gleichen Komponenten. Diese sind:

|                          |   |
|--------------------------|---|
| $\varepsilon_{ijk} = 1$  | falls $(ijk) = (123)$ u. zyklisch (d.h. gerade Permutation)   |
| $\varepsilon_{ijk} = -1$ | falls $(ijk) = (132)$ u. zyklisch (d.h. ungerade Permutation) |
| $\varepsilon_{ijk} = 0$  | falls zwei oder drei Indices gleich sind                      |

Es gilt insbesondere (Summenkonvention!)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \varepsilon_{ijk}\hat{e}_i a_j b_k$$

aktuelle Lage des Kreisels im Inertialsystem, und die erhält man durch Integrieren von  $\boldsymbol{\omega}(t)$ . Wir haben also nicht nur Produkte aus den  $\omega_i$ 's, sondern auch noch... Es ist kompliziert.

Im folgenden werden wir die vielen Striche, die daran erinnern sollen, daß wir uns im körperfesten System befinden, weglassen. Aber nichtsdestoweniger sind die Größen in  $K'$  gemeint.

### 7.2.2 Kräftefreier Kreisel: $\mathbf{N} = \mathbf{0}$

Wenn kein äußeres Drehmoment wirkt, sind wir wenigstens die Probleme mit der rechten Seite von (7.25) los - dann steht dort Null. Die Gleichungen sind immer noch kompliziert, aber wir können wenigstens qualitative Aussagen machen. Dazu betrachten wir den Energiesatz:

$$const. = 2T = \sum_{ik} \omega_i \Theta_{ik} \omega_k = \sum_{i=1}^3 \Theta_i \omega_i^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{L_i^2}{\Theta_i}$$

Das erste ‚=‘ gilt allgemein in jedem Koordinatensystem, der Rest nur für ein Koordinatensystem aus Hauptträgheitsachsen (hierbei sind  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  sind die Hauptträgheitsmomente  $A, B, C$ ). Aus der Drehimpulserhaltung im Laborsystem ( $\frac{d}{dt}\mathbf{L} = 0$ ) folgt natürlich  $\mathbf{L} = const.$  und  $L^2 = const.$  Die Länge eines Vektors ist jedoch unabhängig vom Koordinatensystem, also gilt auch im mitbewegten Koordinatensystem

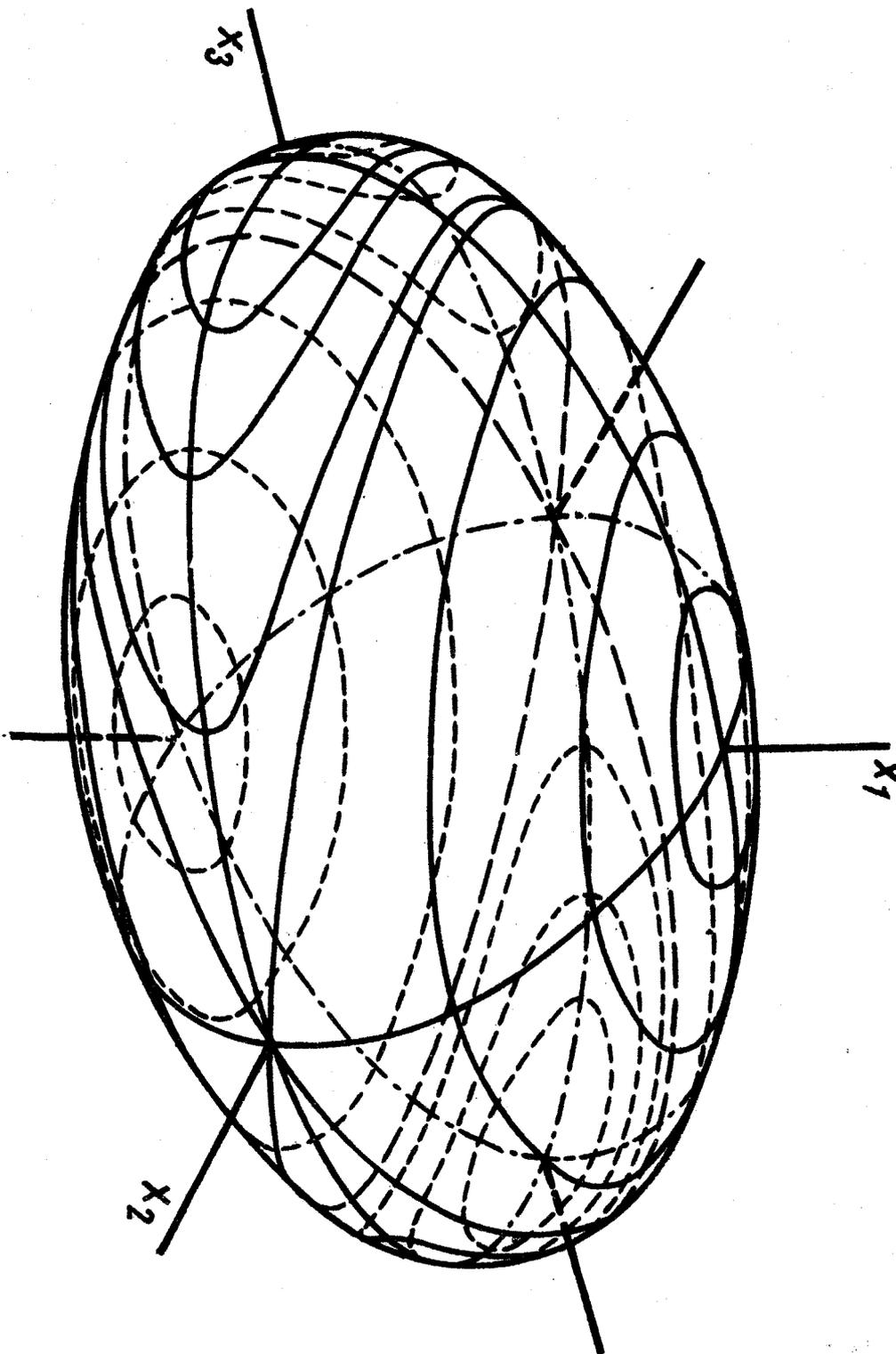
$$\sum_{i=1}^3 L_i^2 = const.$$

Somit ergeben sich aus der Energie- und Drehimpulserhaltung eine Kugel- und eine Ellipsoidgleichung:

$$\sum_{i=1}^3 L_i^2 = const. \quad (\text{Kugelgleichung})$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{L_i^2}{\Theta_i} = const. \quad (\text{Ellipsoidgleichung})$$

Die Bewegung  $L_i(t)$  relativ zum körperfesten Bezugssystem muß so erfolgen, daß sich der Vektor  $\mathbf{L}$  entlang der Schnittlinie von Energieellipsoid und Kugel bewegt. Die folgende Graphik zeigt die Schnittlinien von Kugel und Ellipsoid:



Für Bewegungen, deren  $\mathbf{L}$  fast parallel zu der Hauptträgheitsachse mit kleinstem oder größtem Hauptträgheitsmoment ist<sup>5</sup>, sind diese Bahnen Kurven, die eben diese Achse umschließen. Die Rotation um

<sup>5</sup>Das heißt auch, daß  $\boldsymbol{\omega}$  fast parallel zu diesen Hauptträgheitsachsen ist.

diese beiden Achsen muß also stabil sein. Für die Achse mit dem mittleren Hauptträgheitsmoment (hier die  $x_2$ -Achse) führen diese Bahnen -wie nahe sie auch der  $x_2$ -Achse kommen mögen, ganz weit weg; man kann also nicht so einfach entscheiden, ob eine Rotation um diese Achse stabil ist. Da muß man ein wenig rechnen:

**Stabilitätsanalyse** für  $\omega_1 = \omega_{10}$ ;  $\omega_{20} = \omega_{30} = 0$  Wir betrachten kleine Störungen  $\delta_i$ , setzen also  $\omega_i = \omega_{i0} + \delta_i$  in die Eulerschen Gleichungen ein, und schauen, wie sich diese  $\delta_i$  mit der Zeit ändern. Hierbei werden Terme zweiter Ordnung in  $\delta_i$  vernachlässigt. Aus (7.25) wird hierbei

$$\begin{aligned} A\dot{\delta}_1 &= 0 \\ B\dot{\delta}_2 + (A - C)\omega_{10}\delta_3 &= 0 \\ C\dot{\delta}_3 + (B - A)\omega_{10}\delta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist nett und macht nichts Böses. Die anderen beiden werden noch weiter verarztet. Wenn man die zweite nach  $t$  ableitet, kann man  $\dot{\delta}_3$  aus der dritten einsetzen und erhält

$$BC\ddot{\delta}_2 + (A - B)(A - C)\omega_{10}^2\delta_2 = 0$$

Falls  $(A - B)(A - C) > 0$ , ist dies die Gleichung für eine harmonische Schwingung, die Bewegung bleibt also beschränkt.  $(A - B)(A - C) > 0$  ist erfüllt, wenn  $A$  das größte oder das kleinste Hauptträgheitsmoment ist.

Falls  $(A - B)(A - C) < 0$ , also  $A$  das mittlere Hauptträgheitsmoment darstellt, erhalten wir eine Differentialgleichung für exponentielles Wachstum, kleine Störungen werden also mit der Zeit beliebig groß, diese Achse ist nicht stabil. Das wollten wir nachweisen.

### 7.2.3 Symmetrischer Kreisel mit $A = B$

Wir betrachten den Fall des *symmetrischen* Kreisels mit  $A = B$ . Die Eulerschen Bewegungsgleichungen (7.25) werden zu:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 + (C - A)\omega_2\omega_3 &= 0 \\ A\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_1\omega_3 &= 0 \\ C\dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt sofort

$$\omega_3 = \text{const.}$$

Wir multiplizieren nun die ersten beiden Gleichungen mit  $\omega_1$  bzw.  $\omega_2$  und erhalten durch Addition beider Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1\omega_1 + \dot{\omega}_2\omega_2 &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\omega_1^2 + \omega_2^2) &= 0 \\ \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} &=: \omega_{\perp} = \text{const.} \end{aligned} \tag{7.26}$$

$\omega_1$  und  $\omega_2$  sind ja die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene. Daher ist der Betrag der Projektion  $\omega_{\perp}$  von  $\boldsymbol{\omega}$  auf die Ebene senkrecht zur Figurenachse  $\hat{e}'_3$  konstant. Die Bewegung des Kreisels ist eine starre Rotation von  $\boldsymbol{\omega}$  um  $\hat{e}'_3$ . Mit  $\gamma = \frac{C-A}{A}\omega_3$  wird aus den Eulerschen Gleichungen

$$\dot{\omega}_1 = -\gamma\omega_2 \quad (7.27)$$

$$\dot{\omega}_2 = \gamma\omega_1 \quad (7.28)$$

Leitet man (7.27) nach  $t$  ab und setzt  $\dot{\omega}_2$  aus (7.28) ein, erhält man

$$\ddot{\omega}_1 = -\gamma^2\omega_1,$$

also

$$\omega_1(t) = A \cos \gamma t + B \sin \gamma t.$$

Setzt man dieses  $\omega_1(t)$  wieder in (7.27) ein, ergibt sich

$$\omega_2(t) = A \sin \gamma t - B \cos \gamma t$$

Der Vektor  $\boldsymbol{\omega}_\perp = (\omega_1(t), \omega_2(t))$  durchläuft also gleichförmig einen Kreis. Wir wählen nun unseren Zeitnullpunkt so, daß dieser Vektor für  $t = 0$  in Richtung  $\hat{e}_1$  zeigt. Dann wird  $B = 0$  und (7.26) wird damit zu

$$\sqrt{\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)} = A = \omega_\perp,$$

das Endergebnis lautet also

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_\perp \cos \gamma t \\ \omega_\perp \sin \gamma t \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

Die Projektion der Winkelgeschwindigkeit auf die  $x'_1-x'_2$ -Ebene rotiert also mit der Kreisfrequenz  $\gamma$ . Wegen  $\omega_3 = \text{const.}$ , rotiert der gesamte Vektor  $\boldsymbol{\omega}$  gleichmäßig mit dieser Winkelgeschwindigkeit  $\gamma$  um die Figurenachse; er bewegt sich auf der Mantelfläche eines Kegels, des sog. *Gangpolkegels*. Die Achse dieses Kegels zeigt in Richtung  $\hat{e}_3$ ; das ist jedoch gerade die Figurenachse.

Setzen wir (7.29) in  $\mathbf{L} = (A\omega_1, A\omega_2, C\omega_3)$  ein, erhalten wir

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} A\omega_\perp \cos \gamma t \\ A\omega_\perp \sin \gamma t \\ C\omega_3 \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

Huch! Der Drehimpuls ist nicht konstant, obwohl wir eine kräftefreie Bewegung untersuchen? Ja, ganz recht:  $\mathbf{L}$  ist der Drehimpuls im körperfesten, rotierenden Koordinatensystem. Der Drehimpuls im *Inertialsystem* ist konstant.

Im körperfesten Bezugssystem rotiert also auch  $\mathbf{L}$  mit der Kreisfrequenz  $\gamma$  auf einem Kegel, dessen Achse mit der Figurenachse  $\hat{e}_3$  zusammenfällt.

Wegen<sup>6</sup>

$$\mathbf{L} = A\boldsymbol{\omega} + (C - A)\omega_3\hat{e}_3 \quad (7.31)$$

liegen  $\mathbf{L}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  und die Figurenachse  $\hat{e}_3$  stets in einer Ebene. Daraus folgt weiter, daß die Winkel zwischen  $\mathbf{L}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  und  $\hat{e}_3$  konstant sind.

Ist  $A > C$ , so ist der Öffnungswinkel dieses „Drehimpulskegels“ kleiner als der des Gangpolkegels,  $\mathbf{L}$  liegt also „zwischen“  $\boldsymbol{\omega}$  und  $\hat{e}_3$ . Für  $A < C$  ist der Gangpolkegel spitzer als der Drehimpulskegel, dann liegt  $\boldsymbol{\omega}$  zwischen  $\mathbf{L}$  und  $\hat{e}_3$ .

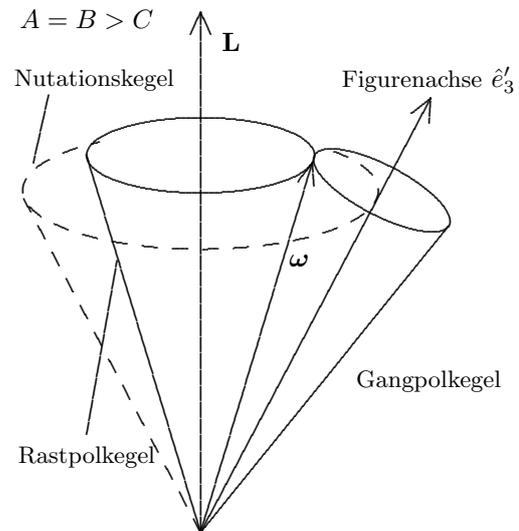
<sup>6</sup>Das erkennt man fast durch bloßes Anschauen von (7.29) und (7.30).

Wie schaut die Bewegung im Inertialsystem aus? Schließlich sitzen wir, die Beobachter, ja nicht auf dem Kreisel, sondern schauen ihn von außen, vom Inertialsystem aus, an. Dort ist  $\mathbf{L}$  raumfest. Also bewegt sich die Figurenachse  $\hat{e}_3$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $-\gamma = \frac{A-C}{A}\omega_3$  auf einem Kegelmantel, dessen Achse mit der raumfesten Drehimpulsachse zusammenfällt. Dieser Kegel heißt *Nutationskegel*. Da  $\mathbf{L}, \boldsymbol{\omega}$  und  $\hat{e}_3$  stets in einer Ebene liegen und die Winkel zwischen  $\mathbf{L}, \boldsymbol{\omega}$  und  $\hat{e}_3$  konstant sind, bleibt also  $\boldsymbol{\omega}$  nichts anderes übrig, als ebenfalls mit  $-\gamma = \frac{A-C}{A}\omega_3$  auf einem Kegelmantel um  $\mathbf{L}$  umzulaufen. Dieser Kegel heißt *Rastpolkegel*.

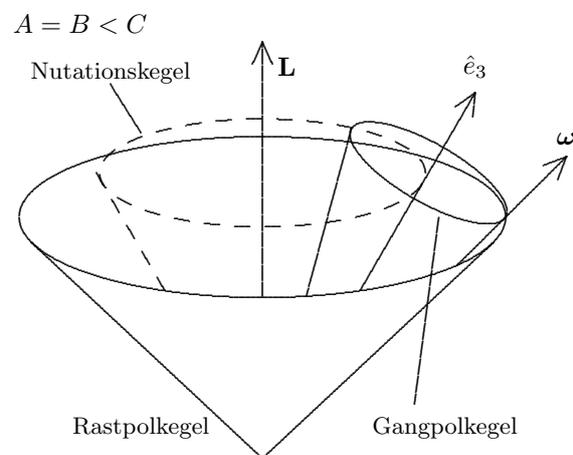
Die kreisende Bewegung von  $\hat{e}'_3$  und  $\boldsymbol{\omega}$  um  $\mathbf{L}$  heißt *Nutation* (oder auch reguläre Präzession).

Für  $A > C$  ist die Nutation und die Rotation um die Figurenachse gleichsinnig, und  $\boldsymbol{\omega}$  liegt „zwischen“  $\mathbf{L}$  und  $\hat{e}_3$ .

Falls  $A < C$ , ist die Nutation gegensinnig zur Rotation um die Figurenachse und die Figurenachse  $\hat{e}_3$  liegt zwischen  $\mathbf{L}$  und  $\boldsymbol{\omega}$ .

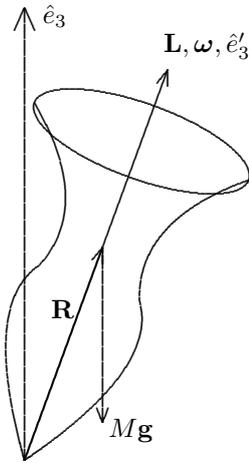


So, jetzt wird die Anschauung gefordert:  $\boldsymbol{\omega}$  rotiert gleichmäßig um  $\mathbf{L}$ . Gleichzeitig rotiert der starre Körper um  $\boldsymbol{\omega}$ . Wenn wir uns die Massenpunkte des starren Körpers fest mit dem Gangpolkegel verbunden denken, ist dies gleichbedeutend damit, daß der Gangpolkegel auf dem Rastpolkegel gleichförmig abrollt. Dann dann rotiert der Gangpolkegel (und die mit ihm fest verbundenen Massenpunkte des starren Körpers) stets um die Berührlinie Rastpol-Gangpolkegel, und diese Berührlinie bewegt sich gleichmäßig um den Rastpolkegel herum.



**Beispiel:** Für die Erde als symmetrischer Kreisel gilt  $\frac{C-A}{A} \approx \frac{1}{300}$ . Da die Periode der Erdrotation 1 Tag ist, sollte also eine 300tägige Periode ( $\sim 10$  Monate) stattfinden. Beobachtet wird die sog. Chandlersche Periode von 14 Monaten. Gründe für die Abweichung sind die Inhomogenität der Massenverteilung und die Tatsache, daß die Erde kein idealer starrer Körper ist.

### 7.2.4 Schwerer symmetrischer Kreisel



Nun betrachten wir die Bewegung eines symmetrischen Kreisels im Gravitationsfeld der Erde. Die Schwerkraft wirke in negativer  $\hat{e}_3$  Richtung, die Figuren-achse habe die Richtung  $\hat{e}'_3$ . Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß der Drehimpuls  $\mathbf{L}$ , der Rotationsvektor  $\boldsymbol{\omega}$  und die Figuren-achse  $\hat{e}'_3$  näherungsweise in ihrer Richtung zusammenfallen.  $\mathbf{N} = -Mg\hat{e}_3$  sei das äußere Drehmoment (s. Abbildung)

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \mathbf{R} \times (M\mathbf{g}) \\ &= MgR\hat{e}'_3 \times (-\hat{e}_3) = MgR\hat{e}_3 \times \hat{e}'_3\end{aligned}$$

Wegen  $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$  gilt weiter

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = MgR\hat{e}_3 \times \hat{e}'_3 \quad (7.32)$$

Jetzt können wir noch ausnutzen, daß  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{L}$  und  $\hat{e}'_3$  nahezu parallel sein sollen. Setzt man

$$\mathbf{L} = \frac{|\mathbf{L}|}{|\boldsymbol{\omega}|}\boldsymbol{\omega} \quad \text{und} \quad \hat{e}'_3 = \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}|}\boldsymbol{\omega}$$

in (7.32) ein, erhält man

$$\frac{|\mathbf{L}|}{|\boldsymbol{\omega}|} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{MgR}{|\boldsymbol{\omega}|} \hat{e}_3 \times \hat{e}'_3,$$

mit  $\boldsymbol{\Omega} := \frac{MgR}{|\mathbf{L}|} \hat{e}_3$  also schließlich

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (7.33)$$

Die Figuren-achse, der Drehimpuls und die Winkelgeschwindigkeit führen also Drehungen um die raum-feste  $\hat{e}_3$ -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit  $|\boldsymbol{\Omega}| = \frac{MgR}{|\mathbf{L}|}$  aus. Man nennt diese Bewegung *Präzession*. Dieser „einfachen Kegelbewegung“ sind im allgemeinen Nutationsbewegungen überlagert<sup>7</sup>. Das ist insbesondere der Fall, wenn die Anfangsbedingung  $\frac{d}{dt}\hat{e}'_3 = 0$  gewählt wird, der Kreisel also zwar rotierend, aber mit ruhender Figuren-achse losgelassen wird!

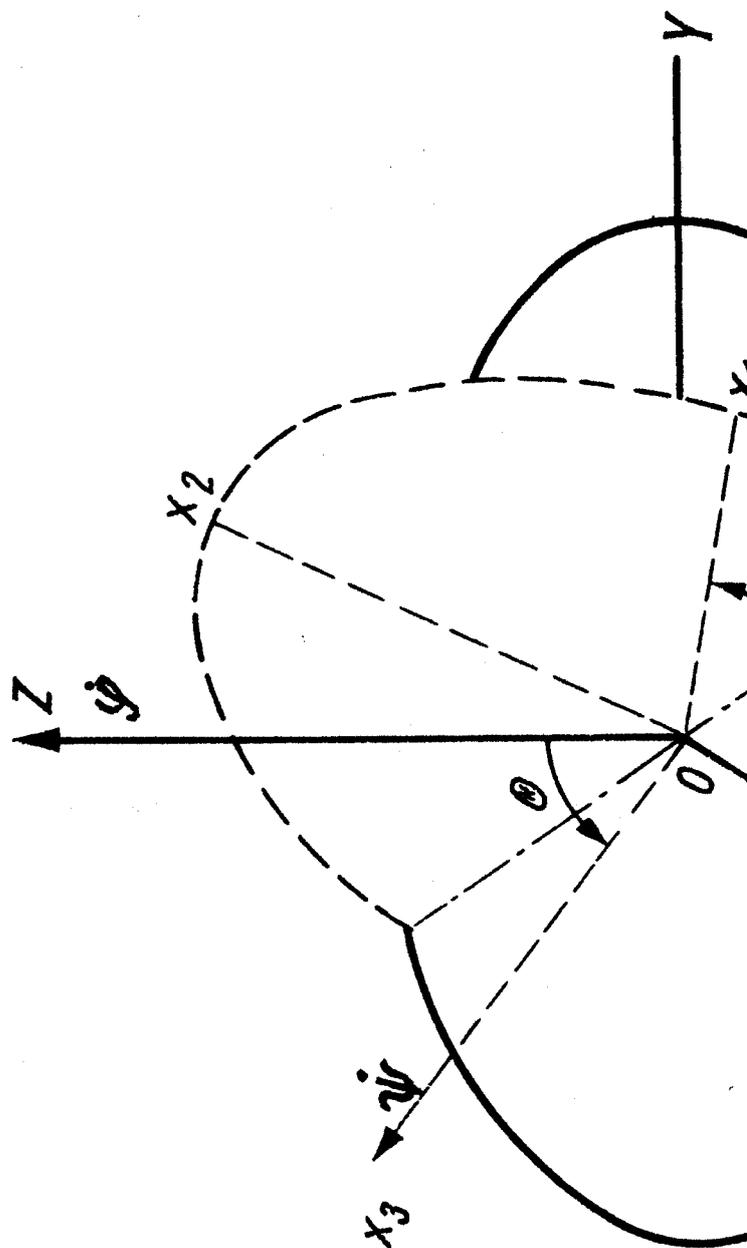
**Anwendung auf die Erde:** Durch die Wirkung von Sonne und Mond auf den Äquator-Wulst präzediert die Erde mit einer Periode von 26000 Jahren.

<sup>7</sup>Aber Achtung! Das heißt dann nicht „der Kreisel eiert“. Wenn Ihr das in einer Praktikumsauswertung schreibt, kann es sein, daß Ihr diese Stelle nochmal verbessern dürft.

### 7.2.5 Die Eulerschen Winkel

Die Eulerschen Gleichungen bestimmen nur die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Zur Beschreibung der Lage des körperfesten Koordinatensystems  $K'$  bezüglich des Inertialsystems  $K$  führt man die 3 Eulerschen Winkel ein. Sie beschreiben 3 Drehungen, durch die das körperfeste System aus dem Inertialsystem hervorgeht. Da Drehungen um endliche Winkel nicht kommutativ sind, ist die Reihenfolge wichtig!

- Drehung  $\varphi$  um die  $z$ -Achse (Winkelbereich: 0 bis  $2\pi$ )
- Drehung  $\vartheta$  um die Knotenlinie  $ON$  (Winkelbereich: 0 bis  $\pi$ , in der Grafik:  $\Theta$ .)
- Drehung  $\psi$  um die  $z'$ -Achse (Winkelbereich: 0 bis  $2\pi$ )



Diese Drehungen werden durch folgende drei Matrizen beschrieben:

$$\Delta_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \Delta_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Drehmatrix  $D$  für die Gesamtdrehung berechnet sich durch Multiplikation der einzelnen Drehmatrizen, wobei die Reihenfolge unbedingt zu beachten ist:

$$D = \underline{\lambda}_\psi \underline{\lambda}_\vartheta \underline{\lambda}_\varphi$$

Die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  im körperfesten System setzt sich aus den drei Eulerschen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_\varphi$ ,  $\omega_\vartheta$  und  $\omega_\psi$  zusammen:

Die  $\psi$ -Drehung wird durch keine weitere Matrix mehr verändert, also

$$\omega_\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix},$$

die  $\vartheta$ -Drehung wird noch durch  $\underline{\lambda}_\psi$  gedreht, also

$$\omega_\vartheta = \underline{\lambda}_\psi \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \dot{\vartheta} \\ -\sin \psi \dot{\vartheta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Drehung um  $\varphi$  muß sogar zwei weitere Drehungen über sich ergehen lassen:

$$\omega_\varphi = \underline{\lambda}_\psi \underline{\lambda}_\vartheta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \vartheta \dot{\varphi} \\ \cos \psi \sin \vartheta \dot{\varphi} \\ \cos \vartheta \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Winkelgeschwindigkeiten darf man vektoriell addieren, somit gilt für  $\boldsymbol{\omega}$  im körperfesten System:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_\varphi + \omega_\vartheta + \omega_\psi = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

## 7.2.6 Allgemeine Bewegungsgleichungen des starren Körpers

Die zeitlichen Ableitungen des Impulses und des Drehimpulses eines starren Körpers liefern uns sechs unabhängige Gleichungen für die sechs Freiheitsgrade. Die zeitliche Ableitung des Drehimpulses ist die Summe aller angreifenden Drehmomente (eingeprägte und Zwangsdrehmomente), die zeitliche Ableitung des Impulses ist analog die Summe aller angreifenden Kräfte (eingeprägte und Zwangskräfte):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{L} &= \underbrace{\mathbf{N}^e}_{\text{eingeprägt}} + \underbrace{\mathbf{N}^z}_{\text{Zwangs-}} \\ \frac{d}{dt} \mathbf{p} &= \mathbf{K}^e + \mathbf{K}^z \end{aligned}$$

Als Beispiel betrachten wir einen Rotor (1 Freiheitsgrad), dessen Rotationsachse nicht durch den Schwerpunkt geht. Es gelte  $\mathbf{K}^e = \mathbf{N}^e = 0$ , so daß nur eine Zwangskraft  $\mathbf{Z} = \mathbf{K}^z$  und ein Zwangsdrehmoment wirken.

$$\Rightarrow \mathbf{Z} = \frac{d}{dt} \mathbf{p}$$

Die Zwangskraft entsteht durch die Beschleunigung des Schwerpunktes bei der Rotation, der ja nicht auf der Drehachse liegt. Sie ist also proportional zur Zentrifugalbeschleunigung:

$$\mathbf{Z} \sim \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (\text{statische Unwucht})$$

Für die zeitliche Änderung des Drehimpulses gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{L} &= \sum_{k=1}^3 \Theta_{ik}\omega_k \dot{\hat{e}}'_i \\ &= \sum_{k=1}^3 \Theta_{ik}\omega_k (\boldsymbol{\omega} \times \hat{e}'_i) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \\ \mathbf{N} &= \frac{d}{dt}\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \quad (\text{dynamische Unwucht})\end{aligned}$$

Nur falls die Drehung um eine Hauptträgheitsachse erfolgt, gilt  $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{L}$ , und die dynamische Unwucht fällt weg.

# 8 Prinzipie der Mechanik

## Inhalt

---

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>8.1</b> | <b>Einige Aspekte der Variationsrechnung</b>                               | <b>104</b> |
| 8.1.1      | Einleitung: Das Brachistochronen-Problem                                   | 104        |
| 8.1.2      | Die Eulerschen Gleichungen für Extrema eines Integrals $\mathcal{I}(y(x))$ | 105        |
| 8.1.3      | Anwendung auf das Brachistochronenproblem                                  | 107        |
| <b>8.2</b> | <b>Hamilton'sches Prinzip</b>  | <b>108</b> |
| <b>8.3</b> | <b>Erhaltungssätze und Invarianten</b>                                     | <b>109</b> |
| 8.3.1      | Noether I  | 109        |
| 8.3.2      | Noether II   | 112        |
| <b>8.4</b> | <b>Hamiltonfunktion und Hamiltonsche Bewegungsgleichungen</b>              | <b>114</b> |
| 8.4.1      | Legendre-Transformation  | 114        |
| 8.4.2      | Definition der Hamiltonfunktion  | 115        |
| 8.4.3      | Ableitung der Hamilton-Gleichungen aus dem Extremalprinzip                 | 117        |
| <b>8.5</b> | <b>Kanonische Transformation</b>   | <b>118</b> |
| 8.5.1      | Motivation   | 118        |
| 8.5.2      | Erzeugende Funktionen der kanonischen Transformationen                     | 119        |
| 8.5.3      | Beispiele zu den kanonischen Transformationen                              | 121        |
| <b>8.6</b> | <b>Hamilton-Jacobi-Theorie</b>   | <b>122</b> |
| <b>8.7</b> | <b>Poisson-Klammern in der Mechanik</b>                                    | <b>124</b> |
| <b>8.8</b> | <b>Satz von Liouville</b>  | <b>127</b> |

---

*Bisher* wurden die Bewegungen durch Differentialgleichungen bestimmt. D.h. wir schauen uns das System in einem Punkt an und sagen dann, wie es sich im nächsten Moment ändern wird. Lokale Eigenschaften bestimmen die Bahnen (bzw. die Trajektorie im Phasenraum).

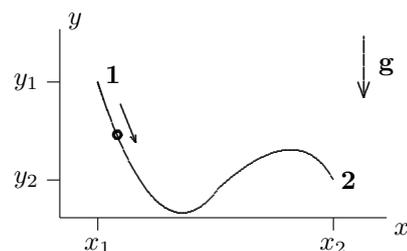
Man kann jedoch auch die Bahn als Ganzes betrachten. Und auch mit diesem globalen Herangehen lassen sich dieselben Bewegungsgleichungen finden. *Jetzt* werden die Bewegungen aus einem Variationsprinzip, also aus globalen Eigenschaften, hergeleitet. Dies ist immer bei Vorliegen von konservativen Kräften mit holonomen und skleronomen Zwangsbedingungen möglich.

Es wird sich herausstellen, daß die Lagrange'schen Gleichungen mit einem Variationsprinzip verknüpft sind. Ein Körper beschreibt genau diejenige Bahn (Trajektorie), bei der ein gewisses Integral längs dieser Bahn minimal wird (Das ist das sog. Hamilton'sche Prinzip oder Prinzip der kleinsten Wirkung)

## 8.1 Einige Aspekte der Variationsrechnung

### 8.1.1 Einleitung: Das Brachistochronen-Problem

Ein Körper gleite reibungsfrei auf einer Bahn im Schwerfeld. Wie muß die Bahn beschaffen sein, damit er am schnellsten von 1 nach 2 kommt?



Wegen  $ds = v dt$  gilt

$$T = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} \frac{ds}{v} \quad (8.1)$$

Die Anfangsbedingung sei  $v = 0$  für  $y = y_1$ . Der Energiesatz heißt hier  $\frac{v^2}{2} + gy = gy_1$ , und für  $ds$  kann man den Pythagoras verwenden:  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2(x)}$

Beides in (8.1) eingesetzt ergibt

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2g(y_1 - y(x))}} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(y_1 - y(x))}} dx \rightarrow \text{minimal}$$

Gesucht ist nun diejenige Kurve  $y(x)$ , für die dieses Integral minimal wird. Wie man sie findet zeigen wir im nächsten Abschnitt.

### 8.1.2 Die Eulerschen Gleichungen für Extrema eines Integrals $\mathcal{I}(y(x))$

Wir suchen diejenige Kurve  $y(x)$ , für die das Integral

$$\mathcal{I} = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx$$

extremal wird.

Dazu nehmen wir an, wir hätten die gesuchte Lösung  $\bar{y} = \bar{y}(x)$  bereits gefunden. Nun betrachten wir Vergleichsbahnen. Sei hierzu  $\eta = \eta(x)$  eine weitere Funktion, für die  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  gelte. Damit ist dann

$$y(x) = \bar{y}(x) + \varepsilon\eta(x)$$

(wobei  $\varepsilon \ll 1$  ist) wieder eine Kurve von A nach B, die nur für  $\varepsilon = 0$  mit der Extremalkurve  $\bar{y}$  übereinstimmt.

Also muß die Funktion

$$\mathcal{I}(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{y}(x) + \varepsilon\eta(x), \bar{y}'(x) + \varepsilon\eta'(x)) dx \quad (8.2)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{y}, \bar{y}') + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' + O(\varepsilon^2) dx \quad (8.3)$$

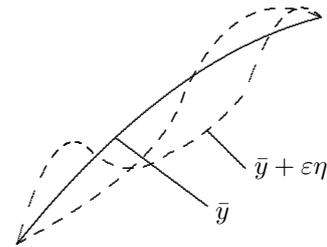
(dies war übrigens eine Taylorentwicklung) bei  $\varepsilon = 0$  ein Extremum haben:

$$0 \stackrel{!}{=} \mathcal{I}'(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}, \bar{y}') \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, \bar{y}, \bar{y}') \eta'(x) \right\} dx$$

Den zweiten Summanden kann man partiell integrieren:

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{\left[ \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2}}_{=0, \text{ da } \eta(x_1)=\eta(x_2)=0} + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}, \bar{y}') \eta(x) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'}(x, \bar{y}, \bar{y}') \right) \eta(x) \right\} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right\} \eta dx \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral muß für alle  $\eta(x)$  verschwinden. Da  $\eta(x)$  nur wenigen Einschränkungen unterliegt (Verschwinden an den Endpunkten, Stetigkeitseigenschaften), folgen hieraus die *Euler-Lagrange-Gleichungen*:



$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0} \quad (8.4)$$

$y$  muß dieser Differentialgleichung genügen. Dadurch ist  $y$  i.A. bis auf die Randwerte bestimmt.

### Spezialfall:

Wenn  $f$  nicht explizit von  $x$  abhängt, also  $f = f(y, y')$ , dann ist  $f - f_{y'} y' = \text{const.}$  ein Integral der Eulergleichung. Denn die Ableitung der linken Seite verschwindet, wenn  $y(x)$  die Euler-Gleichung (8.4) erfüllt. Der Beweis besteht im Nachrechnen. Wir zeigen, daß die Ableitung der linken Seite verschwindet (hierbei ist  $f_y := \frac{\partial f}{\partial y}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (f - f_{y'} y') &= f_y y' + f_{y'} y'' - f_{y'} y'' - y' \frac{d}{dx} f_{y'} \\ &= y' \underbrace{\left( f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die runde Klammer verschwindet wegen den Eulergleichungen.

**zur Wiederholung:** Die totale Ableitung einer Funktion  $g(x, a(x), b(x), \dots)$  mehrerer Veränderlicher nach einer dieser bzw. nach einem Parameter läuft mit der Kettenregel:

$$\frac{d}{dx} g(a(x), b(x), x) = \frac{\partial g}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}$$

Zum Beispiel sieht die Berechnung von  $\frac{df}{dx}$  etwas ausführlicher so aus:

$$\frac{d}{dx} (f(y(x), y'(x))) = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} = f_y y' + f_{y'} y''$$

### Verallgemeinerung auf mehrere Funktionen

Die Bahn wird in diesem Fall durch mehrere Funktionen  $y(x)$  charakterisiert:  $y_1(x), \dots, y_n(x), \dots$

Die Aufgabe lautet nun:

$$\mathcal{I} = \int_1^2 f(x, y_1, y_2, \dots, y'_1, y'_2, \dots) dx \rightarrow \text{extremal}$$

Der Ansatz ist derselbe wie oben. Wir nehmen an, wir hätten die Extremalkurve bereits gefunden und variieren diese Extremalkurve

$$y_i(x) = \bar{y}_i(x) + \varepsilon_i \eta_i(x) =: \bar{y}_i(x) + \delta y_i(x)$$

Man bezeichnet  $\delta y = \varepsilon \eta$  als die *Variation* von  $y$ . Diese muß wieder an den Rändern verschwinden, wir wollen ja schließlich *genau* von hier nach dort kommen und nicht *ungefähr* von hier nach dort:  $\delta y_i(1) = \delta y_i(2) = 0$ . Mit der Abkürzung  $\delta \mathcal{I} \equiv \mathcal{I}(\bar{\varepsilon}) - \mathcal{I}(0)$  muß wieder gelten:

$$0 \stackrel{!}{=} \delta \mathcal{I} = I(\bar{\varepsilon}) - I(0) = \int_1^2 dx \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \delta y'_i \right) \quad (8.5)$$

Nun müssen wir den Variationen einige Aufmerksamkeit widmen. Man sollte immer im Hinterkopf behalten, daß  $\delta y$  nur eine Schreibabkürzung ist für  $y(x) - \bar{y}(x) = \varepsilon \eta(x)$ . Damit läßt sich leicht verstehen, warum man  $d$ 's und  $\delta$ 's "vertauschen" kann:

$$d\delta y = d(y - \bar{y}) = dy - d\bar{y} = \delta dy \quad (8.6)$$

Und was passiert mit Ableitungen wie  $\delta y'$  ?

Dazu schreiben wir die Definition für  $\delta y$  und  $\delta y'$  hin:

$$\begin{aligned} \delta y &= y - \bar{y} \\ \delta y' &= y' - \bar{y}' \end{aligned}$$

Leitet man die erste Gleichung nach  $x$  ab, erhält man

$$\frac{d}{dx} \delta y = y' - \bar{y}'$$

Die rechten Seiten der letzten beiden Gleichungen sind identisch. Ergo auch die linken:

$$\frac{d}{dx} \delta y = \delta y' \quad (8.7)$$

Damit kann man (8.5) weiter umformen und wieder partiell integrieren

$$\begin{aligned} 0 &= \int_1^2 dx \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y_i'} \frac{d}{dx} \delta y_i \right) \\ &= \sum_i \underbrace{\left[ \frac{\partial f}{\partial y_i'} \delta y_i \right]_1^2}_{=0} + \int_1^2 dx \left\{ \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} \delta y_i \right) \delta y_i \right\} \end{aligned}$$

Da die  $\delta y_i$  voneinander unabhängig sind, muß also die runde Klammer für jedes  $i$  verschwinden:

$$\frac{\delta f}{\delta y_i} := \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} \equiv 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots \quad (8.8)$$

Die Kurzschreibweise links bezeichnet man als Variationsableitung.

### 8.1.3 Anwendung auf das Brachistochronenproblem

Es gab folgendes Problem zu lösen:  $T = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y_1-y)}} dx \rightarrow \text{minimal}$ . Also ist (bis auf einen Faktor, der am Minimum nichts ändert)  $f(x, y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y_1-y}}$ .

$f$  hängt nicht explizit von  $x$  ab, wir können also die Formel aus dem Spezialfall benutzen:

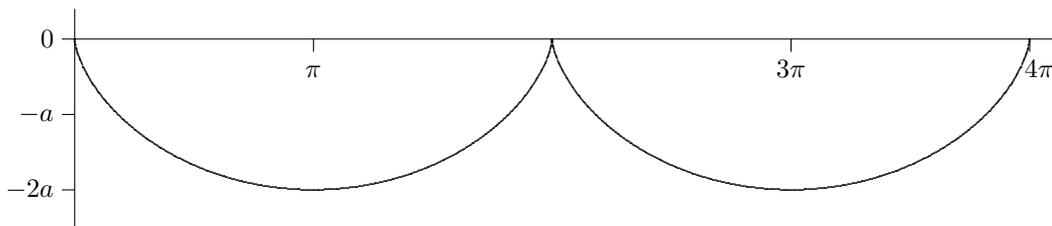
$$\text{const.} = f - \frac{\partial f}{\partial y'} y' = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y_1-y}} - y' \frac{1}{\sqrt{y_1-y}} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{y_1-y}} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \underbrace{(1+y'^2 - y'^2)}_{=1}$$

also nach Quadrieren

$$\frac{1}{y_1-y} \frac{1}{1+y'^2} = \text{const.}^2$$

Die Lösung hierfür ist (für  $y_1 = 0$ ):

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(\cos t - 1)$$



Das sieht man durch Einsetzen:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-a \sin t}{a(1 - \cos t)},$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{a^2 \sin^2 t}{a^2(1 - \cos t)^2} = \frac{a^2(1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}{y^2} = \frac{2a^2}{y^2}(1 - \cos t) = -\frac{2a}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y_1 - y} \frac{1}{1 + y'^2} = \frac{1}{-y} \frac{-y}{2a} = \frac{1}{2a}$$

Und das ist wirklich konstant.

### Beispiel : Kürzeste Kurve in zwei Dimensionen

Wegen  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$  ist

$$f = \sqrt{1 + y'^2}$$

Man könnte jetzt wieder die Formel des Spezialfalles benutzen, aber da  $f$  unabhängig von  $y$  ist, ist es hier sogar noch einfacher, direkt die Euler-Gleichung (8.4) zu verwenden:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const.} \Rightarrow y' = \text{const.}^* = a \Rightarrow y = ax + b$$

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist also tatsächlich eine Gerade - wer hätte es gedacht? Das gleiche Verfahren funktioniert auch auf gekrümmten Flächen, wo man dann natürlich weniger triviale Ergebnisse erhält.

## 8.2 Hamilton'sches Prinzip

Die Eulerschen Gleichungen (8.8) stimmen in ihrer Form exakt mit den Lagrange-Gleichungen  $\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$  überein. Man kann daher die Lagrange-Gleichungen als die Lösung eines Variationsprinzips auffassen, des *Hamiltonschen Prinzips* oder des *Prinzips der kleinsten Wirkung*:

Die Trajektorie eines durch die Lagrangefunktion  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  beschriebenen Systems ist durch das Extremum der Wirkung  $S$  gegeben.

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \iff \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = 0$$

Zur Exaktheit: Wir haben bereits im Abschnitt 8.1.2 bewiesen, daß aus dem Variations-Prinzip die Euler- bzw. Lagrange- bzw. Euler-Lagrange-Gleichungen (alle drei Namen sind üblich) folgen. Die Umkehrung - aus  $\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$  folgt  $\delta S = 0$  - ist weitaus schwieriger zu zeigen. Also nicht hier.

Allerdings ist die **Lagrangefunktion nicht eindeutig bestimmt**. Addiert man zu  $L$  die totale zeitliche Ableitung einer beliebigen Funktion  $G(\mathbf{q}, t)$ ,

$$\tilde{L} = L + \frac{d}{dt}G(\mathbf{q}, t),$$

so ergeben sich dieselben Lagrange-Gleichungen, denn die zusätzlichen Terme mit  $G$  verschwinden:

Mit  $\frac{d}{dt}G(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial G}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial G}{\partial t}$  also insbesondere auch  $\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d}{dt}G = \frac{\partial G}{\partial q_i}$ , ergibt sich für die  $G$ -Terme in den Lagrange-Gleichungen (mind the sum-convention!)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{dG}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{dG}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial G}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial G}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial^2 G}{\partial q_k \partial q_i} \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial G}{\partial q_k} - \frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

### Vorteile des Hamiltonprinzips

Es ist...

- elegant und kompakt
- formunabhängig vom gewählten Koordinatensystem.
- verallgemeinerbar auf z.B. Gravitationstheorie und Quantenmechanik (einschließlich Elementarteilchenphysik und Quantenfeldtheorie)
- Viele andere Probleme der Physik lassen sich als Variationsprinzip formulieren (Elektrodynamik, Strahlenoptik, Kontinuumstheorie).

## 8.3 Erhaltungssätze und Invarianten

Wir haben bereits gezeigt: Wenn  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  nicht explizit von  $q_i$  abhängt ( $q_i$  heißt dann zyklisch), dann gilt der Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const.}$$

### 8.3.1 Noether I

Dies ist eine Verallgemeinerung der zyklischen Variablen. (Nach Emmy Noether, 1882-1935)

Es sei eine Schar von Bahnkurven  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \gamma)$  mit  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t, 0)$  gegeben, so daß

$$L(\mathbf{q}(t, \gamma), \dot{\mathbf{q}}(t, \gamma), t) = L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$$

gilt. (Mit anderen Worten: Die Lagrange-Funktion ist invariant unter der Koordinatentransformation  $\mathbf{q}(t, 0) \rightarrow \mathbf{q}(t, \gamma)$ .)

Dann ist die Größe

$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0}$$

zeitlich konstant, also Erhaltungsgröße.

Beweis: Da  $L$  bei Änderung von  $\gamma$  konstant ist, verschwindet die Ableitung nach  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
0 &= \left. \frac{\partial}{\partial \gamma} L(\mathbf{q}(t, \gamma), \dot{\mathbf{q}}(t, \gamma), t) \right|_{\gamma=0} \\
&= \left. \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \gamma} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \gamma} \right) \right|_{\gamma=0} \\
&= \left. \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \gamma} + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \gamma} \right\} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right\} \frac{\partial q_i}{\partial \gamma} \right) \right|_{\gamma=0} \\
&= \left. \sum_{i=1}^s \underbrace{\left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{=0} \frac{\partial q_i}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0} + \left. \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \gamma} \right) \right|_{\gamma=0}
\end{aligned}$$

Da für ein mechanisches System die Euler-Lagrange-Gleichungen gelten, ist die Klammer in der ersten Summe identisch Null, woraus dann die Behauptung folgt.

### Anwendungen

Mit diesem Theorem kann man die bekannten Erhaltungssätze für Impuls und Drehimpuls herleiten. Die Potentiale seien im folgenden geschwindigkeitsunabhängig:  $V = V(\mathbf{q})$ .

### Translationsinvarianz

Die Lagrangefunktion hänge nicht vom Koordinatenursprung ab, d.h. sie ist invariant unter der Koordinatentransformation

$$\mathbf{r}_i(t) \rightarrow \mathbf{r}_i(t, \gamma) = \mathbf{r}_i(t) + \gamma \hat{e}.$$

( $\hat{e}$  bezeichnet einen beliebigen Einheitsvektor). Dieser Fall liegt zum Beispiel vor, wenn das Potential nur von Differenzvektoren  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  abhängt:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 - V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \dots, t)$$

Die Voraussetzungen für Noether I sind erfüllt. Wegen  $\left. \frac{\partial \mathbf{r}_i(t, \gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0} = \hat{e}$  gilt also

$$const. = \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0} = \sum_{i=1}^N \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}}_{=\mathbf{P}} \hat{e} = \mathbf{P} \cdot \hat{e}$$

Da  $\hat{e}$  beliebig, gilt die Erhaltung des Gesamtimpulses  $\mathbf{P}$ , d.h. wir haben drei Konstanten der Bewegung. Ist die Translationsinvarianz nur in einer bestimmten Richtung  $\hat{e}$  gegeben, so gilt die Erhaltung der Komponente des Gesamtimpulses nur in dieser Richtung.

### Rotationssymmetrie

Die Drehung um eine Achse  $\hat{\omega}$  um den Winkel  $\gamma$  lasse die Lagrange-Funktion unverändert. Eine Drehung um den Winkel  $\gamma$  um die Achse  $\hat{\omega}$  wird dargestellt durch<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Der Beweis dieser Gleichung ist ein schönes Beispiel für die Eleganz der Tensorrechnung. Wir zeigen, daß die Tensorgleichung (8.9) in *einem* Koordinatensystem gilt. Wegen den Transformationseigenschaften von Tensoren gilt sie dann

$$\mathbf{r}_i(t) \rightarrow \mathbf{r}_i(t, \gamma) = \mathbf{r}_i \cos \gamma + \hat{\omega}(\hat{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)(1 - \cos \gamma) + (\hat{\omega} \times \mathbf{r}_i) \sin \gamma \quad (8.9)$$

Mit  $\left. \frac{\partial \mathbf{r}_i(t, \gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0} = \hat{\omega} \times \mathbf{r}_i$  ergibt sich

$$\text{const.} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i (\hat{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \hat{\omega} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = \hat{\omega} \mathbf{L}$$

Je nachdem, ob die Rotationsinvarianz bzgl. beliebigen Drehachsen  $\hat{\omega}$  gilt, oder nur bzgl. einer festen Achse, bleibt der Gesamtdrehimpuls erhalten, oder nur die Projektion in Richtung der festen Achse.

Im Falle der Erhaltung des Gesamtdrehimpulses ergeben sich so drei Konstanten der Bewegung.

### Zeittranslationsinvarianz

Hier kommt man ohne den Noether'schen Satz aus.

Die Lagrangefunktion hänge nicht explizit von der Zeit ab; es sei  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , also  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . Da nach wie vor wegen den Lagrangegleichungen  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  gilt, ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^s \left( \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right\} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \dot{q}_i \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \\ &\Rightarrow \left( \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - L = \text{const.} \end{aligned} \quad (8.10)$$

Wir haben also eine weitere Konstante der Bewegung gefunden. Was stellt sie dar?

Zur Auswertung dieses Ausdrucks benötigen wir ein wenig zusätzliches Wissen über  $T$ . Für holonom-skleronome Zwangsbedingungen gilt mit  $\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$ :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j |\dot{\mathbf{r}}_j|^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \sum_{i,k=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s g_{ik}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (8.11)$$

wobei  $g_{ik} := \sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} = g_{ki}$  ist.

$T(\mathbf{q})$  ist also eine homogene Funktion 2. Grades in den  $\mathbf{q}$ .

Homogen, weil kein Summand ohne irgendwelche  $q$ 's vorkommt.

---

automatisch in *allen* Koordinatensystemen. (Wir haben hier übrigens Tensoren 1.Stufe, also einfach Vektoren...).

Wählen wir also  $\hat{\omega} = \hat{e}_z$ . Bei Drehung um die z-Achse gilt

$$\mathbf{r}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \gamma - y \sin \gamma \\ x \sin \gamma + y \cos \gamma \\ z \end{pmatrix}.$$

Und aus (8.9) wird mit  $\hat{\omega} = \hat{e}_z$ :

$$\mathbf{r}(\gamma) = \mathbf{r} \cos \gamma + \hat{e}_z (\hat{e}_z \cdot \mathbf{r}) (1 - \cos \gamma) + (\hat{e}_z \times \mathbf{r}) \sin \gamma = \begin{pmatrix} x \cos \gamma \\ y \cos \gamma \\ z \cos \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z(1 - \cos \gamma) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \sin \gamma \\ x \sin \gamma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \gamma - y \sin \gamma \\ x \sin \gamma + y \cos \gamma \\ z \end{pmatrix}$$

Damit ist (8.9) für beliebige  $\hat{\omega}$  bewiesen.

2. Grades, weil für  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:  $T(\lambda \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} g_{ik}(\lambda \dot{q}_i)(\lambda \dot{q}_k) = \lambda^2 T(\mathbf{q})$ . Die '2' vom 2. Grade ist das Quadrat vom  $\lambda$ .

Damit ist

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^s g_{ik} \dot{q}_k$$

(das  $\frac{1}{2}$  fällt weg, da jeder Summand zweimal gezählt wird und  $g_{ik}$  symmetrisch ist.). Und weiter<sup>2</sup>

$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2 \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i,k=1}^s g_{ik} \dot{q}_k \dot{q}_i}_{=T} = 2T$$

Zurück zu  $L$ . Das Potential  $V$  hängt nicht von den Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  ab,  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$ . Also ist

$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^s \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T \quad (8.12)$$

Setzt man alles ein, erhält man

$$2T - L = 2T - (T - V) = T + V \equiv E = \text{const.},$$

die Energieerhaltung.

### 8.3.2 Noether II

Dies ist eine etwas allgemeinere Formulierung des Noetherschen Prinzips.

Vorgegeben sei eine Schar von Bahnkurven mit  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \gamma)$  und  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{q}}(t, 0)$ , so daß

$$L(\mathbf{q}(t, \gamma), \dot{\mathbf{q}}(t, \gamma), t) = L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) + \frac{d}{dt} G(\mathbf{q}(t, \gamma), t) \quad (8.13)$$

gilt<sup>3</sup>. Dann ist die Größe

$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} - \frac{\partial}{\partial \gamma} G(\mathbf{q}, t) \Big|_{\gamma=0} = \text{const.} \quad (8.14)$$

konstant.

Der Beweis verläuft analog zu Noether I durch Ableiten von (8.13) nach  $\gamma$ , wobei wir den Term mit  $G$  natürlich auch berücksichtigen müssen. Für die einzelnen Summanden erhält man

<sup>2</sup>Dies ist ein Spezialfall des *Satzes von Euler*:

Sei  $F(x_1, \dots, x_n)$  eine homogene Funktion  $k$ -ten Grades, so gilt

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i = k F$$

Dieser Satz kommt gelegentlich vor; es schadet nichts, ihn mal gesehen zu haben.

<sup>3</sup>Man sagt, die Lagrange-Funktion sei bis auf eine Umeichung invariant. Der zusätzliche Summand  $\frac{dG}{dt}$  hat keine Auswirkungen auf die Bewegungsgleichungen, wie wir bereits in 8.2 auf Seite 109 sahen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \gamma} L(\mathbf{q}(t, \gamma), \dot{\mathbf{q}}(t, \gamma), t) &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{d}{dt} G(\mathbf{q}, t) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \gamma} G(\mathbf{q}, t)\end{aligned}$$

Einsetzen in (8.13) liefert nun sofort (8.14).

### Anwendung: Invarianz gegenüber Galilei-Transformationen

Das Potential  $V$  sei bezüglich einer Galilei-Transformation

$$\mathbf{r}_i(t, \gamma) = \mathbf{r}_i + \gamma \mathbf{u}_0 t$$

mit festem  $\mathbf{u}_0$  invariant (z.B. weil es nur von Differenzvektoren  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  abhängt). Das heißt

$$V(\mathbf{r}_1(t, \gamma), \dots) = V(\mathbf{r}_1, \dots).$$

Dann können wir die Lagrangefunktion so umformen, daß sie der Bedingung (8.13) genügt:

$$\begin{aligned}L(\dots, \mathbf{r}_i(t, \gamma), \dots, \dot{\mathbf{r}}_i(t, \gamma), \dots, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\mathbf{r}}_i + \gamma \mathbf{u}_0)^2 - V(\mathbf{r}_1 + \gamma \mathbf{u}_0 t, \dots, \mathbf{r}_N + \gamma \mathbf{u}_0 t, t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) + \sum_{i=1}^N \left( m_i \gamma \mathbf{u}_0 \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{2} m_i \gamma^2 \mathbf{u}_0^2 \right) \\ &= L(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) + \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \mathbf{u}_0 \gamma + \frac{m_i}{2} \gamma^2 \mathbf{u}_0^2 t \right)}_{=G}\end{aligned}$$

Also mit Noether II (8.14):

$$const. = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \gamma} - \frac{\partial}{\partial \gamma} G = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{u}_0 t - \mathbf{u}_0 \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{u}_0 (\mathbf{P}t - M\mathbf{R})$$

Hier wurde bereits der Schwerpunkt  $\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{r}_i$  verwendet.

$\mathbf{u}_0$  war beliebig. Somit folgt:  $\mathbf{P}t - M\mathbf{R} = const.$  Diese Konstante nennen wir nun ganz zwanglos „ $-M\mathbf{R}_0$ “, denn dann können wir schön nach  $\mathbf{R}$  auflösen und erhalten

$$\mathbf{R}(t) = \frac{1}{M} \mathbf{P}t + \mathbf{R}_0$$

Das ist die gleichförmige und geradlinige Bewegung des Schwerpunktes.

Der Zusammenhang zwischen Symmetrie und Erhaltungsgrößen ist von fundamentaler Bedeutung für die gesamte Physik. Besonders wichtige Anwendungen liegen in der Theorie der Elementarteilchen und in der Hydrodynamik komplexer Fluide.

### Zusammenfassung

Für ein System von  $N$  Massenpunkten, zwischen denen konservative Kräfte wirken, die nur von  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  abhängen, gibt es - den klassischen Erhaltungsgrößen entsprechend - 10 Konstanten der Bewegung.

| Erhaltungsgröße                             |               | (Galilei-)Gruppe der Transformationen        |   |
|---|---------------|--|---|
| $\mathbf{P} = \text{const.}$                | Gesamtimpuls  | $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$  | räumliche Translation   |
| $\mathbf{L} = \text{const.}$                | Drehimpuls    | $\mathbf{r}'_i = D \cdot \mathbf{r}_i$       | Drehung (Drehmatrix $D$ bestimmt durch Drehachse $\hat{\omega}$ und Drehwinkel $\gamma$ : $D = D(\hat{\omega}, \gamma)$ ) |
| $M\mathbf{R} - \mathbf{P}t = \text{const.}$ |               | $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{u}t$ | spezielle Galilei-Transformation  |
| $E = \text{const.}$                         | Gesamtenergie | $t' = t + \tau$                              | Zeittranslation um $\tau$   |

## 8.4 Hamiltonfunktion und Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Nun wird die bereits bestens bekannte Lagrange-Gleichung umgeschrieben. Dies schlägt Brücken zur  
 - Quantenmechanik  
 - formalen Mechanik  
 - modernen koordinatenfreien Mechanik  
 - nichtlinearen Dynamik.

### 8.4.1 Legendre-Transformation

#### Motivation

Wiederholung: Lagrange:

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \text{ für } i = 1, \dots, s$$

$$\text{Verallgemeinerter Impuls: } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

Sind nun die Gleichungen  $p_i = p_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  nach  $\dot{q}_i$  auflösbar, so liegt es für Professoren nahe, Bewegungsgleichungen mit  $p_i$  und  $q_i$  als unabhängige Variablen zu suchen. Denn die Prof's wissen, daß diese Gleichungen dann sehr schöne Eigenschaften haben werden. Aber wie sehen die dann aus?

Im folgenden seien nun  $p_i = p_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  nach  $\dot{\mathbf{q}}$  auflösbar, d.h. aus gegebenen  $p_i$ ,  $q_i$  und  $t$  läßt sich  $\dot{q}_i$  berechnen<sup>4</sup>. Wir erhalten dann Gleichungen der Form

$$q_i = q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

---

#### Beispiel : Kartesische Koordinaten

Dort ist  $L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + V$ . Damit wird  $\mathbf{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$  und es ist  $\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{m_i}$

---

<sup>4</sup>Achtung: Man sollte auch das Kleingedruckte beachten. Wir stellen hier nicht nur einzelne Gleichungen um, sondern wir müssen ein komplettes, evtl. nichtlineares Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) \\ p_2 &= p_2(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) \\ &\vdots \\ p_s &= p_s(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) \end{aligned}$$

Die Sache macht also etwas mehr Arbeit, als der Ausdruck 'müssen wir auflösen' vermuten läßt.

**Zur Legendre-Transformation**

Gegeben sei eine Funktion  $f(x, y)$ . Dann ist  $df = u dx + v dy$  mit

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{und} \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Nun soll in diesen letzten beiden Gleichungen statt  $x$  die unabhängige Variable  $u$  eingeführt werden. Definiere hierzu

$$g := f - u x \tag{8.15}$$

Demn damit ist

$$dg = df - u dx - x du = u dx + v dy - u dx - x du = v dy - x du,$$

also

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u} \quad \text{und} \quad v = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Das bedeutet:

$$\left. \begin{array}{l} x = x(u, y) = -\frac{\partial g}{\partial u} \\ v = v(u, y) = \frac{\partial g}{\partial y} \end{array} \right\} \text{ist Umkehrung von} \left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \\ v(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right.$$

**8.4.2 Definition der Hamiltonfunktion**

Gemäß der Idee der Legendre-Transformation definiert man analog zu (8.15):

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := \dot{\mathbf{q}} \mathbf{p} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i p_i - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) \tag{8.16}$$

Nun werden die Bewegungsgleichungen in  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$  hergeleitet:

Dazu verwenden wir das totale Differential von  $H$ . Aus (8.16) folgt

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i + p_i dq_i - dL \tag{8.17}$$

Die Berechnung von  $dL$  erfordert einige Zeilen. Nach Definition gilt

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Dies in die Lagrange-Gleichungen eingesetzt ergibt:

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{\text{Lagrange}} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i$$

Diese beiden Formeln werden in der nächsten Zeile verwendet.

$$dL = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_i (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Setzt man dies in (8.17) ein, so ergibt sich

$$dH = \sum_i (p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - p_i d\dot{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Andererseits kann man auch aus  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  das totale Differential direkt berechnen:

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Die beiden Ausdrücke für  $dH$  müssen natürlich identisch sein; somit folgen hieraus durch Koeffizientenvergleich die **Hamiltonschen Bewegungsgleichungen**

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \end{array}} \quad \text{für } i = 1, \dots, s \quad (8.18)$$

Den  $s$  Lagrange-Gleichungen zweiter Ordnung entsprechen also die  $2s$  Hamilton-Gleichungen erster Ordnung.

Bislang wurde nur gezeigt, daß aus den Lagrange-Gleichungen die Hamilton-Gleichungen folgen. Zum Nachweis der Äquivalenz ist noch zu zeigen, daß die Lagrange-Gleichungen aus den Hamilton-Gleichungen folgen. Wegen (8.16) ist  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \dot{\mathbf{q}} \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t)$ . Also

$$dL = \mathbf{p} d\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p} - \underbrace{\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}}_{=-\dot{\mathbf{p}}} d\mathbf{q} - \underbrace{\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}}_{=\dot{\mathbf{q}}} d\mathbf{p} - \frac{\partial H}{\partial t} dt = \mathbf{p} d\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{p}} d\mathbf{q} - \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Koeffizientenvergleich mit  $dL = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} d\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial t} dt$  liefert

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{p} \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \dot{\mathbf{p}}$$

Wenn man diese beiden Gleichungen zusammenwurschtelt, erhält man

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$$

Beziehungsweise, wenn man alles auf eine Seite bringt und die Gleichung komponentenweise schreibt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Was zu zeigen war.

### Was ist $H$ ?

Wir bemühen nochmals Formel (8.12) aus dem Abschnitt über die Zeittranslationsinvarianz. Für konservative, skleronome Systeme gilt, wie dort gezeigt:

$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

Wegen  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  läßt sich mit diesem Zusammenhang die Definitionsgleichung der Hamilton-Funktion umschreiben:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - (T - V) = T + V \equiv E$$

$H$  ist also lediglich die Gesamtenergie, ausgedrückt in  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$ .

Die Koordinaten  $q_i$  und  $p_i$  spannen einen  $2s$ -dimensionalen Phasenraum auf, d.h. die Koordinaten eines Punktes in diesem Phasenraum beschreiben das gegebene System völlig. Im Gegensatz hierzu braucht man zur Charakterisierung des Systems im  $s$ -dimensionalen Konfigurationsraum des Lagrange-Formalismus sowohl den 'Ort'  $q_i$  als auch die 'Geschwindigkeit'  $\dot{q}_i$ .  $q_i$  und  $p_i$  heißen zueinander konjugierte Variable oder kanonisch konjugierte Variable, da Orts- und Impulscharakter bei sog. 'kanonischen' Transformationen (was das ist, wird gleich gesagt) verschwinden.

### Beispiel : Eindimensionaler harmonischer Oszillator

Aus der Lagrange-Funktion  $L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q)$  folgt  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$  und weiter  $\dot{q} = \frac{p}{m}$

Solange  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ , gilt die Energieerhaltung, und es ist

$$H = \dot{\mathbf{q}}\mathbf{p} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2} \frac{p^2}{m^2} + V = \frac{p^2}{2m} + V(q) = E$$

Im harmonischen Potential  $V(q) = \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$  wird hieraus

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

Die Hamilton-Gleichungen lauten nun

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \end{aligned}$$

Differenziert man eine der beiden Gleichungen nach  $t$  und setzt sie in die andere ein, erhält man eine Schwingungsgleichung in  $q$  bzw. in  $p$  (je nachdem, welche Gleichung man ableitet).

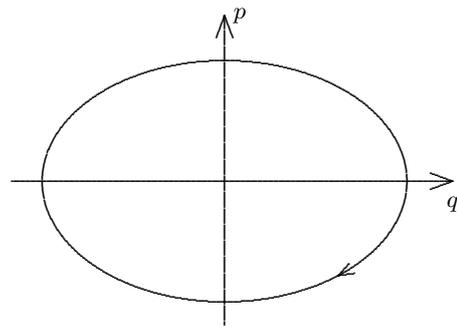
Deren Lösung lautet

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ p(t) &= -m\omega q_0 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$1 = \frac{H}{E} = \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

Dies ist eine Ellipsengleichung, also beschreibt der Oszillator im Phasenraum  $(p, q)$  eine Ellipse.



### 8.4.3 Ableitung der Hamilton-Gleichungen aus dem Extremalprinzip

Man kann natürlich auch die Hamilton-Gleichungen aus dem Variationsprinzip ableiten. Der Einfachheit halber wird mit  $s = 1$  gerechnet. Die Rechnung für mehrere Freiheitsgrade verläuft analog. Es treten lediglich einige Summenzeichen auf.

Die Wirkung ist wieder

$$S = \int_1^2 L dt = \int_1^2 (p\dot{q} - H) dt$$

Die Variation liefert

$$0 = \delta S = \int_1^2 dt \left\{ \delta p \dot{q} + p \delta \dot{q} - \left( \frac{\partial H}{\partial q} \delta q + \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right) \right\} = \int_1^2 \delta p dq + p \delta \dot{q} dt - \left( \frac{\partial H}{\partial q} \delta q + \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right) dt \quad (8.19)$$

Sofern man sich noch an die Formeln (8.6) und (8.7) erinnert, kann man den zweiten Term umformen und (mal wieder) partiell integrieren:

$$\int_1^2 p \delta \dot{q} dt = \int_1^2 p \frac{d}{dt} \delta q dt = [p \delta q]_1^2 - \int_1^2 \dot{p} \delta q dt = - \int_1^2 \delta q dp$$

Die eckige Klammer verschwindet, da  $q$  und  $p$  an den Anfangs- und Endpunkten festgehalten werden, also dort  $\delta q = 0$  gilt. Einsetzen in (8.19) liefert

$$0 = \delta S = \int_1^2 \left\{ \left[ dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right] \delta p - \left[ dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt \right] \delta q \right\}$$

$q$  und  $p$  sind unabhängig voneinander, also müssen die eckigen Klammern verschwinden:

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \frac{dp}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q}$$

Was zu zeigen war.

## Energieerhaltung

Für  $H = H(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t)$  gilt

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^s (-\dot{p}_i \dot{q}_i + \dot{q}_i \dot{p}_i) = \frac{\partial H}{\partial t}, \text{ also}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

$\frac{\partial H}{\partial t}$  ist genau dann Null, wenn  $H$  nicht explizit von der Zeit abhängt. Da  $H$  die Gesamtenergie des Systems ist, entspricht  $0 = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}$  der Energieerhaltung.

## 8.5 Kanonische Transformation

### 8.5.1 Motivation

Im Lagrange-Formalismus zog eine zyklische Variable die Konstante der Bewegung  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{const.}$  nach sich. Will man mit dieser Konstanten die Anzahl der Freiheitsgrade  $s$  des Systems verringern, so muß man diese (implizite) Gleichung zuerst nach einem  $q_i$  auflösen und in die Lagrange-Funktion einsetzen.

Im Hamilton-Formalismus werden die  $p_i$  als Variablen verwendet. Für eine zyklische Variable gilt dann

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k \equiv \text{const.},$$

d.h. wir kennen bereits den Wert einer Variablen, ohne irgendwelche Arbeit geleistet zu haben. Und was geschieht mit dem zugehörigen Ort  $q_k$ ? Die zyklische Variable  $q_k$  kommt (per definitionem) in der Lagrange-Funktion nicht vor, also tritt sie auch nicht bei den generalisierten Impulsen  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ,

$i = 1, \dots, s$  auf. Also hängt auch  $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$  nicht von  $q_k$  ab<sup>5</sup>.  $q_k$  braucht uns also nicht im mindesten zu interessieren. Wir lösen nun die Hamilton-Gleichungen für die verbliebenen  $q_i$  und  $p_i$  (d.h.  $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, s$ ). Hierbei tritt das konstante  $p_i$  als Parameter auf. Und anschließend, wenn wir alle Koordinaten außer  $q_k$  kennen, können wir vermöge  $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$  das noch unbekannte  $q_k$  bestimmen:

$$q_k(t) = \int \frac{\partial H(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}{\partial p_k} dt$$

Für  $H$  reduziert sich das Problem also zwanglos von  $2s$  auf  $2s-2$  Freiheitsgrade (wie gesagt:  $p_k = \text{const.}$ ):

$$H = H(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t)$$

Zyklische Variable sind also im Hamilton-Formalismus besonders nützlich. Und das ist gerade einer seiner Vorteile.

Die **Idee** besteht nun darin, neue Variablen  $Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  und  $P_i = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  zu suchen, so daß möglichst viele Variablen zyklisch werden. Allerdings muß die Form der Hamilton-Gleichungen beim Variablen-Wechsel erhalten bleiben, denn zyklische Koordinaten sind ja gerade im Hamilton-Formalismus so außerordentlich nützlich. Wir bräuchten also neben den neuen Koordinaten  $P_i$  und  $Q_i$  auch noch eine Funktion  $K$ , die die Rolle der Hamilton-Funktion übernimmt. In diesem Sinne:

**Definition:** Die Transformation

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \\ P_i &= P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \end{aligned}$$

heißt *kanonisch*, falls eine Funktion  $K = K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  existiert, so daß

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad \text{und} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

gilt. (Forminvarianz der kanonischen Gleichungen bei kanonischen Transformationen)

### 8.5.2 Erzeugende Funktionen der kanonischen Transformationen

**Behauptung:** Eine Transformation  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ ,  $H \rightarrow K$  ist kanonisch, wenn es eine Funktion  $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  gibt, so daß

$$\sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} \quad (8.20)$$

gilt.  $F$  heißt *Erzeugende der Transformation*.

Der Beweis dieser Behauptung erfolgt in zwei Schritten:

a.)  $F$  legt die Transformation und auch  $K$  vollständig fest. Nachweis: Einerseits ist

$$dF = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} dQ_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

Andererseits folgt aus der Voraussetzung (8.20) durch Multiplikation mit  $dt$

<sup>5</sup>Man kann dies auch schneller zeigen: Wegen  $p_k = \text{const.}$  ist

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{dp_k}{dt} = 0.$$

Also hängt  $H$  nicht von  $q_k$  ab.

$$dF = \sum_{i=1}^s (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H)dt$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \quad (8.21)$$

Sind  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}$  und  $F$  gegeben, so kann  $p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  nach  $Q_i$  aufgelöst werden:

$$Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (8.22)$$

Aus (8.21) erhielten wir  $P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ . Hier setzen wir die  $Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  aus (8.22) ein und erhalten

$$P_i = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (8.23)$$

Jetzt können wir natürlich auch noch (8.22) und (8.23) nach  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$  auflösen<sup>6</sup> und sehen, daß die neue Hamilton-Funktion  $K$  dann vollständig bestimmt ist:

$$K = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), t) + \frac{\partial}{\partial t} F(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), \mathbf{Q}, t)$$

b.) Die von  $F$  erzeugte Transformation ist kanonisch

Wir verwenden das Variationsprinzip, um die Bewegungsgleichungen in  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{P}$  und  $K$  herzuleiten. Weiterhin verwenden wir symbolische Skalarprodukte, um uns die Summenzeichen zu sparen ( $\mathbf{QP} = \sum_{i=1}^s P_i Q_i$  u.ä.). Integration von (8.20) ergibt

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \{ \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \} = \int_{t_1}^{t_2} dt \{ \mathbf{P}\dot{\mathbf{Q}} - K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) \} + F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Die linke Seite stellt gerade die Wirkung  $S$  dar. Die Variation von  $S$  verschwindet,  $\delta S = 0$ , also muß auch die Variation der rechten Seite verschwinden. Bei dieser Variation sind  $\mathbf{q}(t_1)$  und  $\mathbf{q}(t_2)$  fest (allerdings können  $\mathbf{Q}(t_1)$  und  $\mathbf{Q}(t_2)$  durchaus variieren!). Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \delta [\text{rechte Seite}] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \mathbf{P} \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{P} \delta \dot{\mathbf{Q}} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}} \delta \mathbf{Q} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}} \delta \mathbf{P} \right\} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} \delta \mathbf{Q} \Big|_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

Mit  $\delta \mathbf{q}(t_{1,2}) = 0$  und  $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{P} \delta \dot{\mathbf{Q}} dt = \mathbf{P} \delta \mathbf{Q} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{P}} \delta \mathbf{Q} dt$

$$\begin{aligned} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \mathbf{P} \left( \dot{\mathbf{Q}} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}} \right) - \delta \mathbf{Q} \left( \dot{\mathbf{P}} + \frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}} \right) \right\} + \underbrace{\mathbf{P} \delta \mathbf{Q} \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} \delta \mathbf{Q} \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0, \text{ da } \mathbf{P} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}}} \end{aligned}$$

Die  $\delta \mathbf{Q}$  und  $\delta \mathbf{P}$  sind wieder voneinander unabhängig, also folgt wie gewünscht

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}}$$

<sup>6</sup>Dies ist ein (i.a. nichtlineares) Gleichungssystem in 2s Unbekannten!

oder wieder komponentenweise

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad \text{und} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \quad (8.24)$$

### 8.5.3 Beispiele zu den kanonischen Transformationen

#### Beispiel 1: Austauschtransformation

Es sei  $F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = -\sum_{i=1}^s q_i Q_i$ . Dann folgt

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j} = -Q_j \quad P_j = -\frac{\partial F}{\partial Q_j} = q_j$$

Die Orts- und Impulskoordinaten werden also gegeneinander ausgetauscht. Den generalisierten Koordinaten  $p_i$  und  $q_i$  kommt somit bei den kanonischen Transformationen keine besondere Bedeutung zu.

Man könnte nun mittels einer Austauschtransformation Impulse und Geschwindigkeiten vertauschen und dann mittels einer Funktion  $F$  noch eine kanonische Transformation durchführen. Wegen der Austauschtrafo würde also „ $F$  effektiv auf  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{Q}$  wirken“. Oder umgekehrt: erst kanonische Transformation und dann Austauschtransformation; oder Austauschtransformation, kanonische Transformation, Austauschtransformation. Durch diese Austauschtransformationen lassen sich also erzeugende Funktionen konstruieren, die von den generalisierten Impulsen abhängen. Es gibt also neben  $F = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  noch drei weitere erzeugende Funktionen, für die ähnliche Zusammenhänge gelten wie für  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ . (Man kann natürlich auch direkt mit den folgenden  $F_{2,3,4}$  die obige Herleitung durchrechnen.) Dies sind:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) &= F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) + \mathbf{PQ} & \text{mit } p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \\ \beta) \quad F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) &= F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) - \mathbf{pq} & \text{mit } q_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \\ \gamma) \quad F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) &= F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) + \mathbf{PQ} - \mathbf{pq} & \text{mit } q_i &= -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial P_i} \end{aligned}$$

Es gilt stets:

$$K = H + \frac{\partial F_i}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, 4,$$

Die Numerierung ist willkürlich, wird aber in den Lehrbüchern eingehalten.

#### Beispiel 2: Punkttransformation<sup>7</sup>

Sei  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{i=1}^s g_i(q_1, \dots, q_s, t) P_i$  mit beliebigen Funktionen  $g_i$ .

$$\Rightarrow \quad Q_j = g_j(q_1, \dots, q_s, t) \quad p_j = \sum_{i=1}^s \frac{\partial g_i}{\partial q_j} P_i$$

und weiter

$$K = H + \sum_{i=1}^s \frac{\partial g_i(q_1, \dots, q_s, t)}{\partial t} P_i$$

<sup>7</sup>Der Name kommt daher, daß die  $g_i$ 's nur von den Koordinaten des jeweiligen Punktes abhängen:

$$g_i = g_i(q_1, \dots, q_s, t)$$

analog:  $F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) = -\sum_{i=1}^s g_i(Q_1, \dots, Q_s, t) p_i$

$$\Rightarrow q_j = g_j(Q_1, \dots, Q_s, t), \quad P_j = \sum_{i=1}^s \frac{\partial g_i}{\partial Q_j} p_i$$

### Beispiel 3: Transformation auf Polarkoordinaten

Gegeben sei eine Hamilton-Funktion in kartesischen Koordinaten:

$$H = H(p_x, p_y, x, y) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + V(x, y)$$

Wir wollen nun vermöge der erzeugenden Funktion

$$F_3(r, \varphi, p_x, p_y) = -r \cos \varphi p_x - r \sin \varphi p_y$$

neue Koordinaten  $r, \varphi, P_r, P_\varphi$  einführen. Aus  $q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$  folgt

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_x} = r \cos \varphi \\ y &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_y} = r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Aus  $P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$  folgt

$$\begin{aligned} P_r &= -\frac{\partial F_3}{\partial r} = p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi \\ P_\varphi &= -\frac{\partial F_3}{\partial \varphi} = -p_x r \sin \varphi + p_y r \cos \varphi \end{aligned}$$

Diese Gleichungen kann man nach  $p_x$  und  $p_y$  auflösen und erhält

$$\begin{aligned} p_x &= P_r \cos \varphi - \frac{1}{r} P_\varphi \sin \varphi \\ p_y &= P_r \sin \varphi + \frac{1}{r} P_\varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

Wegen  $\frac{\partial F_3}{\partial t} = 0$  ergibt sich die neue Hamilton-Funktion zu

$$\begin{aligned} K(P_r, P_\varphi, r, \varphi) &= \frac{1}{2m} \left( \left( P_r \cos \varphi - \frac{1}{r} P_\varphi \sin \varphi \right)^2 + \left( P_r \sin \varphi + \frac{1}{r} P_\varphi \cos \varphi \right)^2 \right) + V(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\ &= \frac{1}{2m} \left( P_r^2 + \frac{1}{r^2} P_\varphi^2 \right) + V(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \end{aligned}$$

Wir haben also auf eine etwas ungewöhnliche Art Polarkoordinaten eingeführt.

## 8.6 Hamilton-Jacobi-Theorie

Im folgenden Abschnitt muß man sehr genau buchhalten, welche Variablen man bereits kennt und welche nicht. Wir hoffen, daß dieses Kapitel mit Hilfe des Beispiels verständlich ist.

**Ziel:** Suche eine kanonische Transformation, so daß  $K \equiv 0$  wird. Denn dann ist

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0$$

Die Bewegungsgleichungen wären dann also schon gelöst! Genau das werden wir nun tun. Obendrein suchen wir auch gleich noch die Lösung in den ursprünglichen Koordinaten.

Als **Ansatz** für unsere Transformation verwenden wir eine erzeugende Funktion vom Typ 2. Sie heiße  $S^8$ :

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = S(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s, t)$$

Es gilt bei dieser kanonischen Transformation:

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} \quad \text{und} \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

Der Ansatz  $K = 0$  liefert sofort die *Hamilton-Jacobische Differentialgleichung*:

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, q_1, \dots, q_s, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (8.25)$$

$H$  enthält die Impulse  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$  quadratisch. Wir haben also eine nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung in  $s + 1$  Variablen  $(q_1, \dots, q_s, t)$  vor uns.

Aus der Mathematik ist bekannt, daß unter gewissen Voraussetzungen ein sog. *vollständige Integral* dieser Differentialgleichung existiert. Dies ist dann eine Funktion  $S$  mit  $s + 1$  frei wählbaren Konstanten, die die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung löst. Da in (8.25) nur Ableitungen von  $S$  vorkommen, ist eine dieser Konstanten additiv:  $S = S(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t) + \alpha_{s+1}$ . Dieses  $\alpha_{s+1}$  interessiert uns jedoch nicht weiter, da wir nur Ableitungen von  $S$  brauchen werden - und beim Ableiten fällt  $\alpha_{s+1}$  weg. Wir erhalten also

$$S(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t)$$

Die gesuchte erzeugende Funktion erhält man, indem man die  $\alpha_i$  den konstanten Impulsen  $P_i$  gleichsetzt:

$$P_i = \text{const.} = \alpha_i$$

Nun berechnen sich die  $Q_i$  wie üblich:

$$Q_i = \frac{\partial S(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s, t)}{\partial P_i}$$

Gemäß unserem Ansatz sind auch die  $Q_i$  konstant. Auflösen nach  $q_i$  liefert dann die Lösung der Bewegungsgleichungen in den ursprünglichen Koordinaten:

$$q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s, t)$$

Aus  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$  folgt schließlich

$$p_i = p_i(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s, t)$$

Die  $Q_i$  und  $P_i$  bestimmt man aus den Anfangsbedingungen und hat damit das Problem gelöst. Gut gell?

<sup>8</sup>Der Name ist natürlich nicht zufällig. Hinter dieser Funktion verbirgt sich die Wirkung.

**Beispiel : Der harmonische Oszillator**

Aus  $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$  erhält man die Hamilton-Jacobi-Dgl.

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Hieraus müssen wir nun  $S$  bestimmen<sup>9</sup>. Häufig hilft ein Separationsansatz weiter. Dieser ist bei der Hamilton-Jacobi-Dgl. typischerweise additiv. Ergo:

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) + T(t, \alpha)$$

Einsetzen ergibt

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 = -\frac{\partial T}{\partial t}$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nicht von  $t$  ab. Also muß die rechte Seite bei Änderung von  $t$  konstant bleiben. Da die rechte Seite nur von  $t$  abhängt muß sie also konstant sein. Analog folgt, daß die linke Seite der Gleichung eine Konstante ist. Aufgrund der Gleichung müssen beide Konstanten übereinstimmen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\alpha = \text{const.}$$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 = \alpha = \text{const.}$$

Aus der ersten Gleichung folgt einfach  $T = -\alpha t$  (die Konstante ist unwichtig, da  $S$  eh nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, wie wir inzwischen ja schon oft genug gelesen haben.). Die zweite Gleichung sagt uns mal wieder, daß die Gesamtenergie konstant ist; aus ihr erhält man  $\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2}$  und weiter  $W = \int \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2} dq$ . Setzen wir nun den transformierten Impuls  $P$  anstelle von  $\alpha$  ein, so haben wir

$$S = \int \sqrt{2mP - m^2\omega^2 q^2} dq - Pt$$

Ableiten liefert  $Q$  (Integrationskonstanten sind nichtig):

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \int \frac{m dq}{\sqrt{2mP - m^2\omega^2 q^2}} - t = \frac{1}{\omega} \arcsin \left( q \sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} \right) - t$$

Auflösen liefert  $q$ :

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \omega Q)$$

Ableiten liefert  $p$ :

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2mP - m^2\omega^2 q^2} = \sqrt{2mP - 2mP \sin^2(\omega t + \omega Q)} = \sqrt{2mP} \cos(\omega t + \omega Q)$$

$Q$  und  $P$  sind die Integrationskonstanten.

**8.7 Poisson-Klammern in der Mechanik**

Das Ziel dieses Abschnittes ist eine abstrakte Formulierung der Mechanik, die den Übergang zur Quantenmechanik erleichtern soll.

**Definition:**

<sup>9</sup>Dies ergibt -insbesondere bei nichttrivialen Problemen- häufig Schwierigkeiten, die mit Schnitten in der komplexen Ebene zusammenhängen.

Gegeben seien zwei Funktionen  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  und  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  im Phasenraum. Unter der *Poisson-Klammer* von  $F_1$  mit  $F_2$  versteht man

$$\{F_1, F_2\} := \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \frac{\partial F_2}{\partial p_i} - \frac{\partial F_1}{\partial p_i} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right) \quad (8.26)$$

### Beispiele

$$\{p_k, p_l\} = 0, \quad \{q_k, q_l\} = 0, \quad \{q_k, p_l\} = \delta_{kl}$$

### Rechenregeln

- (1)  $\{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\}$
- (2)  $\{F_1 + F_2, F_3\} = \{F_1, F_3\} + \{F_2, F_3\}$
- (3)  $\{c, F_1\} = 0$ , wobei  $c = \text{const.}$
- (4)  $\{F_1 F_2, F_3\} = F_1 \{F_2, F_3\} + \{F_1, F_3\} F_2$
- (5)  $\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0$  (Jacobi-Identität)

(4) folgt aus der Produktregel der Differentiation, (5) läßt sich durch Nachrechnen bestätigen.

In der Mechanik wird häufig die Poisson-Klammer nur eingeschränkt verwendet, nämlich als Poisson-Klammer einer Funktion  $F$  mit der Hamiltonfunktion  $H$ :  $\{F, H\}$ . Den Sinn erkennt man, wenn man die totale zeitliche Ableitung von  $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  berechnet (Damit Ihr sie nicht ganz vergesst, verwenden wir die Summenkonvention):

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$$

Ist  $F$  nicht explizit zeitabhängig, so gilt mit  $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ :  $\frac{df}{dt} = \{f, H\}$

Was steht hier jetzt eigentlich? Wir haben ein mechanisches System, das durch die Koordinaten  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}$  und  $t$  beschrieben wird. Wir geben uns irgendwelche Anfangswerte vor. Die  $\mathbf{q}$  und die  $\mathbf{p}$  ändern sich dann gemäß den Hamilton-Gleichungen - das System bewegt sich ja schließlich. Also sind die  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$  und die  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$  bereits festgelegt. Nun betrachten wir diese Funktion  $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , die \*nichts\* mit unserem System und der Bewegung des Systems zu tun zu haben braucht. Nichts! Und nun fragen wir uns, wie sich  $F$  ändert, wenn wir genau die Werte  $\mathbf{q}(t)$  und  $\mathbf{p}(t)$  einsetzen, die bereits durch die Hamilton-Gleichungen bestimmt sind. Da  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$  nur noch von der Zeit abhängen, hängt auch  $F$  nur noch von der Zeit ab:  $F = F(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = F(t)$ . Und dieses  $F$  leiten wir nun nach  $t$  ab. Wie man sieht, braucht man die Hamilton-Gleichungen nicht gelöst zu haben, um  $\frac{dF}{dt}$  berechnen zu können; es genügt die Kenntnis von  $F$  und  $H$ . (Aber in  $F$  und  $H$  gehen die  $p_i$  und  $q_i$  ein.)

### Beispiele:

$$\left. \begin{aligned} f = q_j, \quad \dot{f} = \dot{q}_j = \{q_j, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ f = p_j, \quad \dot{f} = \dot{p}_j = \{p_j, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned} \right\} \text{Hamilton'sche Bewegungsgleichungen}$$

Weiterhin gilt: Verschwindet die Poisson-Klammer  $\{f, H\}$  einer nicht explizit zeitabhängigen Funktion  $f$ , so ist  $f$  eine Konstante der Bewegung. Denn es gilt immer noch  $\frac{df}{dt} = \{f, H\}$  und das soll ja eben gleich Null sein.

In der Quantenmechanik verwendet man eckige Klammern. Die Beziehungen lauten dort

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

$$\frac{d}{dt} \langle f \rangle = \frac{i}{\hbar} [H, f] + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$$

Diese Formeln braucht Ihr nicht zu verstehen. Aber wenn Euch dann diese QM-Gleichungen im Sommersemester wieder begegnen, werdet Ihr Euch freuen, daß Ihr sie schon einmal gesehen habt :).

Bei der Definition der Poisson-Klammer  $\{F_1, F_2\}$  haben wir irgendwelche kanonischen Variablen  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$  verwendet. Ergibt sich ein anderer Wert, wenn wir eine kanonische Transformation durchführen?

Da  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  den Zustand unseres mech. Systems ein-eindeutig bestimmen, hängen  $F_1$  und  $F_2$  also von der Zeit  $t$  und vom Zustand des Systems ab. Führen wir eine kanonische Transformation durch, so ergeben sich andere Variable  $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$  statt  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ . Die Funktionen  $F_{1,2}$  ändern sich auch. Und zwar so, daß sie für *dieselbe* Lage des Systems (egal, ob ich es z.B. durch Zylinder- oder Polarkoordinaten beschreibe) *denselben* Wert annimmt. Wir haben also andere Variable  $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ , die sich auf andere Art im Laufe der Zeit ändern, und wir haben andere  $F_{1,2}$ , die auf andere Art mit  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{P}$  zusammenhängen. In der Definition der Poisson-Klammer (8.26) stünden dann das eine Mal Ableitungen der ursprünglichen  $F_{1,2}$  nach  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$ , das andere Mal Ableitungen des transformierten  $F_{1,2}$  nach  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{P}$  - also keineswegs dieselben Zahlen. Ergibt sich nun das gleiche Ergebnis, wenn wir die Poisson-Klammer zuerst mit den ursprünglichen  $F_{1,2}$  und den  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$  berechnen und dann mit den transformierten  $F_{1,2}$  und  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{P}$ ? Ja!

**Die Poisson-Klammer ist unabhängig vom Satz der kanonischen Variablen, der für die Definition verwendet wird.**

Wir beweisen diesen Satz nur für nicht explizit zeitabhängige Transformationen. Zu zeigen ist

$$\{F_1, F_2\}_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}} = \{F_1, F_2\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}$$

Zuerst zeigen wir:

Seien  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  und  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  zwei Sätze kanonisch konjugierter Variablen mit  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = K(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ . Weiterhin sei  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  bzw.  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  (es tritt -wie angekündigt nirgends eine explizite Zeitabhängigkeit auf.).

Dann gilt:

$$\{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \quad (8.27)$$

(das sind genau die Zusammenhänge, die auch für die klein geschriebenen  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$  gelten.)

Zur Verifikation berechnen wir  $\dot{Q}_i$  und vergleichen die Koeffizienten (Summenkonvention):

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{d}{dt} Q_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \dot{p}_j \\ &= \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \\ &= \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \left( \frac{\partial K}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} + \frac{\partial K}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \left( \frac{\partial K}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial K}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \\ &= \frac{\partial K}{\partial Q_k} \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial K}{\partial P_k} \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \\ &= -\dot{P}_k \{Q_i, Q_k\} + \dot{Q}_k \{Q_i, P_k\} \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurden die Hamilton-Gleichungen in den neuen Koordinaten und die Definition der Poisson-Klammern verwendet. Der Koeffizientenvergleich liefert nun  $\{Q_i, Q_k\} = 0$  und  $\{Q_i, P_k\} = \delta_{ik}$ . Eine analoge Rechnung für  $\dot{P}_i$  liefert  $\{P_i, P_k\} = 0$ .

Der nächste Schritt besteht nun darin,  $\{F_1, F_2\}$  umzuschreiben:

$$\begin{aligned}
 \{F_1, F_2\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} &= \sum_j \left[ \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \frac{\partial F_2}{\partial p_j} - \frac{\partial F_2}{\partial q_j} \frac{\partial F_1}{\partial p_j} \right] && \text{Definition} \\
 &= \sum_{j,k} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \left( \frac{\partial F_2}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} + \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial p_j} \left( \frac{\partial F_2}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \right] && \text{produktive Eins} \\
 &= \sum_{j,k} \left[ \frac{\partial F_2}{\partial Q_k} \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} - \frac{\partial F_1}{\partial p_j} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} - \frac{\partial F_1}{\partial p_j} \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \right] && \text{Umsortieren} \\
 &= \sum_k \left[ \frac{\partial F_2}{\partial Q_k} \{F_1, Q_k\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} + \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \{F_1, P_k\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \right] && \text{Definition}
 \end{aligned}$$

Setzt man in der ersten und letzten Zeile dieser Gleichung  $F_1 = Q_k$  bzw.  $F_1 = P_k$  so erhält man mit (8.27):

$$\{F_2, Q_k\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = -\frac{\partial F_2}{\partial P_k} \quad \text{bzw.} \quad \{F_2, P_k\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \frac{\partial F_2}{\partial Q_k}$$

Die Rechnung der letzten Zeilen ist natürlich auch richtig, wenn man  $F_1$  und  $F_2$  vertauscht. Dann erhält man

$$\{F_1, Q_k\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = -\frac{\partial F_1}{\partial P_k} \quad \text{bzw.} \quad \{F_1, P_k\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \frac{\partial F_1}{\partial Q_k}$$

Eingesetzt also:

$$\{F_1, F_2\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \sum_k \left( \frac{\partial F_2}{\partial Q_k} \frac{-\partial F_1}{\partial P_k} + \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} \right) = \{F_1, F_2\}_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}} \quad (8.28)$$

**Man kann also die Indices weglassen.**

Diese Rechnung zeigt, daß Poisson-Klammern mehr bedeuten als nur eine Abkürzung der Schreibweise. Ihr Wert ist unabhängig von den gewählten Koordinaten. Die Schreibweise  $\{F_1, F_2\}$  ist also sowohl eindeutig als auch zutreffend; würde man spezielle Koordinaten nennen -  $\{F_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}), F_2(\mathbf{q}, \mathbf{p})\}$  - so wären diese Koordinaten zu unrecht ausgezeichnet. Am ehesten könnte man schreiben  $\{F_1(\text{System}), F_2(\text{System})\}$ .

## 8.8 Satz von Liouville

Eine genauere Formulierung und einen Beweis dieses Satzes findet man im Landau-Lifschitz. Wir wollen uns hier auf einige erklärende Worte beschränken.

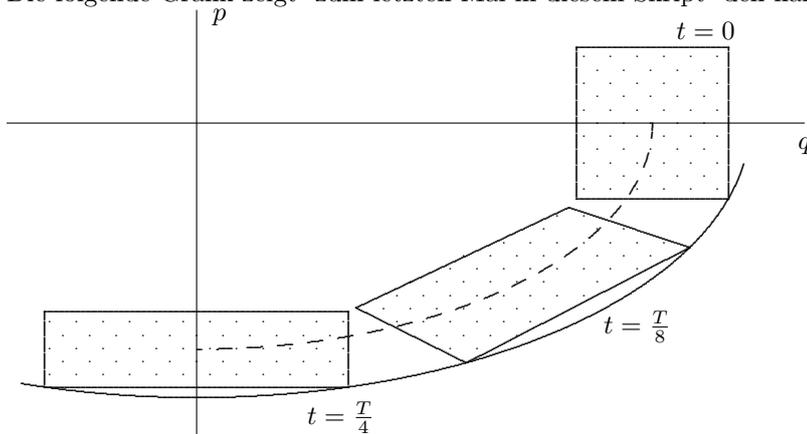
Dieser Satz wird vor allem dann wichtig, wenn man mit vielen Freiheitsgraden zu kämpfen hat. Dies ist in der Thermodynamik sehr häufig der Fall. Ein Liter Gas enthält immerhin  $10^{23}$  Moleküle.

Wir betrachten den Phasenraum mit  $2s$  Dimensionen. Der Zustand unseres Systems wird durch einen einzigen Punkt im Phasenraum beschrieben. Während der zeitlichen Entwicklung wird sich dieser Punkt i.a. bewegen, da sich das System ja gemäß den Bewegungsgleichungen verändert. Benachbarte Punkte entsprechen fast dem gleichen Zustand des Systems. Wir betrachten nun einen Bereich im Phasenraum. Am Anfang umfasse er den Raumbereich  $V_0$ . Jeder Punkt dieses Bereiches repräsentiert einen kompletten Zustand unseres Systems. Wir betrachten also nicht nur ein System, sondern sehr viele, die allerdings alle fast gleiche Anfangswerte haben. Nun ändern sich all diese Systeme gemäß den Bewegungsgleichungen, die Punkte im Phasenraum bewegen sich. Dadurch verändert sich natürlich die Lage und die Form unseres Bereiches. Der Satz von Liouville sagt nun, daß sich das Volumen des Bereiches hierbei *nicht* ändert.

Bezeichne  $V_t$  unseren Raumbereich zur Zeit  $t$ , so gilt:

$$\int_{V_0} dp_1 \dots dp_s dq_1 \dots dq_s = \int_{V_t} dp_1 \dots dp_s dq_1 \dots dq_s \quad (8.29)$$

Die folgende Grafik zeigt -zum letzten Mal in diesem Skript- den harmonischen Oszillator.



Einzelne Punkte bewegen sich auf Ellipsen. Dies ist für zwei Punkte angedeutet. Der zur Zeit  $t = 0$  quadratische Bereich wird bei der Bewegung aller seiner Punkte wie angedeutet verzerrt.

Was geschieht mit solchen Volumina bei Variablentransformationen? Jeder Punkt  $(p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s)$  wird hierbei auf einen Punkt  $(P_1, \dots, P_s, Q_1, \dots, Q_s)$  abgebildet. Das heißt unser ursprünglicher Bereich  $V$  wird auf einen anderen Bereich  $V'$  abgebildet. Bei kanonischen Transformationen bleibt nun das Phasenraumvolumen erhalten. In Buchstaben:

$$\int_V dp_1 \dots dp_s dq_1 \dots dq_s = \int_{V'} dP_1 \dots dP_s dQ_1 \dots dQ_s \quad (8.30)$$

Auch beim Beweis dieser Behauptung wollen wir auf den Landau-Lifschitz (der übrigens gar nicht so anspruchsvoll ist, wie oft behauptet wird) verweisen.